# Corrigé du DM n°1

## Exercice 1

1. (a) Si l'équation est vérifiée, on a $A \cup X = B$. Or $A \subset A \cup X$ donc $\boxed{A \subset B}$.

   (b) $B \backslash A \subset B$ donc $B \backslash A \subset A \cup X$. Comme $B \backslash A \not\subset A$, on en déduit donc $\boxed{B \backslash A \subset X}$. Il n'y a pas égalité a priori; en effet $X$ se décompose sous la forme $X = B \backslash A \cup Y$ avec $Y \subset A$.

   (c) Réciproquement, posons $X = B \backslash A \cup Y$ avec $Y \subset A$.
   alors $A \cup X = A \cup (B \backslash A \cup Y) = A \cup (B \backslash A) \cup Y = A \cup (B \backslash A) = B$ car $Y \subset A$.
   Conclusion :
   Si $A \not\subset B$, $(E_1)$ n'a pas de solution.
   Si $A \subset B$ alors $(E_1) \iff X = B \backslash A \cup Y$ avec $Y \subset A \iff \boxed{A \subset X \subset B}$

2. Analyse

   Si l'équation est vérifiée, on a $A \cap X = B$. Or $A \cap X \subset A$ donc $\boxed{B \subset A}$.
   $A \cap X \subset X$ donc $\boxed{B \subset X}$. Il n'y a pas égalité a priori; en effet $X$ se décompose sous la forme $X = B \cup Y$ avec $Y \not\subset A$.

   Synthèse

   Posons $X = B \cup Y$ avec $Y \subset \overline{A}$.
   On a alors $A \cap X = A \cap (B \cup Y) = (A \cap B) \cup (A \cap Y) = A \cup B = B$ car $Y \subset A \Rightarrow A \cap Y = \varnothing$ et $B \subset A \Rightarrow A \cup B = B$.
   Conclusion :
   Si $B \not\subset A$, $(E_2)$ n'a pas de solution.
   Si $B \subset A$ alors $(E_2) \iff X = B \cup Y$ avec $Y \subset \overline{A} \iff \boxed{X \subset \overline{A \backslash B}}$

## Exercice 2

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & my & + & 2z & = & 1 & L_1 \\ x & + & 2my & + & 3z & = & 0 & L_2 \\ mx & + & y & + & 2z & = & m & L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & my & + & 2z & = & 1 & \\ & & my & + & z & = & -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & (1-m^2)y & + & (2-2m)z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & + & my & = & 1 \\ & & z & + & my & = & -1 \\ & & 2(1-m)z & + & (1-m^2)y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & 2z & + & my & = & 1 & \\ & & z & + & my & = & -1 & \\ & & & & (m-1)^2y & = & 2(1-m) & L_3 \leftarrow L_3 - 2(1-m)L_2 \end{array}\right.$$

**Cas 1 :** $m = 1$

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & + & y & = & 1 \\ & & z & + & y & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & z & & & = & 2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & z & + & y & = & -1 & \end{array}\right.$$

$\iff (x,y,z) = (-z+2, -z-1, z) = z(-1,-1,1) + (2,-1,0)$

L'intersection est donc la droite passant par le point $A(2,-1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,-1,1)$

**Cas :** $m \neq 1$

On obtient en remontant le système triangulaire $(\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3-m}{1-m} \\ y = \dfrac{2}{1-m} \\ z = \dfrac{m+1}{m-1} \end{cases}$

$$\boxed{\text{L'intersection est donc le point } B_m \text{ de coordonnées } \left(\frac{3-m}{1-m}, \frac{2}{1-m}, \frac{m+1}{m-1}\right)}$$

## Exercice 3

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{j=k}^{n} 2^j \right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1-2^{n-k+1}}{1-2}$ (somme des $n-k+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^k$.

   $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k(2^{n-k+1}-1) = \sum_{k=0}^{n} (2^{n+1}-2^k) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k = (n+1)2^{n+1} - 2^0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

   soit $\boxed{S_n = n2^{n+1}+1}$

2. $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ k \leqslant j \leqslant n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant j \end{cases}$

   d'où $S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j \left( \sum_{k=0}^{j} 1 \right)$ d'où $\boxed{S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{j=k-1, j=0}^{n-1} (j+1)2^j = S_{n-1}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n+1}$

4. $T_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} (i2^{i+1}+1) = \sum_{i=1}^{n} i2^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2^2 \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} + n$ donc $\boxed{T_n = 4((n-1)2^n+1)+n}$