DEVOIR DE MATHEMATIQUES n°1

Exercice 1

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. On considère l'équation en X une partie de E :

$$(E_1) \quad A \cup X = B$$

   On va résoudre cette équation par analyse-synthèse.

   (a) Supposons l'équation vérifiée, donner une condition nécessaire sur A et B pour que l'équation admette des solutions.

   (b) Montrer que $B \backslash A \subset X$. Y a-t-il égalité ?

   (c) Résoudre l'équation par synthèse.

2. Résoudre de même l'équation en X une partie de E :

$$(E_2) \quad A \cap X = B$$

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Discuter en fonction du paramètre réel m l'intersection entre la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équations :

$$(\mathcal{D}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2my & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) \quad mx + y + 2z = m$$

Vous résoudrez le système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss et vous préciserez dans chaque cas la nature géométrique de l'intersection trouvée.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.