Correction du DS n°1.

Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Puisque $P(-1) = a-b+c$, le triplet (a,b,c) vérifie l'équation $a-b+c=5$. Les valeurs $P(1)=1$ et $P(2)=2$ donnent les autres équations $a+b+c=1$ et $4a+2b+c=2$. Ainsi, le triplet (a,b,c) vérifie la propriété demandée si et seulement s'il est solution du système $\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 5 \\ a+b+c & = & 1 \\ 4a+2b+c & = & 2 \end{array}\right.$

   On résout alors ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 5 \\ a+b+c & = & 1 \\ 4a+2b+c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} a-b+c & = & 5 & \\ 2b & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 6b-3c & = & -18 & L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 5 \\ b & = & -2 \\ -12-3c & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 5 \\ b & = & -2 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

   Le seul triplet qui convient est $(1,-2,2)$, soit le polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. On applique la même méthode, mais cette fois le système ne comporte que deux équations. Il n'aura pas une solution unique, et on va exprimer une inconnue en fonction des autres.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 4 \\ 4a+2b+c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} a-b+c & = & 4 & \\ 6b-3c & = & -15 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 4 \\ c & = & 2b+5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b-1 \\ c & = & 2b+5 \end{array}\right.$$

   Les triplets solutions sont tous ceux qui s'écrivent $(-b-1, b, 2b+5)$ avec $b \in \mathbb{R}$, qui correspondent aux polynômes $(-b-1)x^2 + bx + 2b + 5$.

Exercice 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}**$ alors $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ainsi

   $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ par somme télescopique.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j|$$

   Calculez S_1, S_2 et S_3, puis calculez S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_1 = |1-1| = 0$
- $S_2 = |1-1| + |1-2| + |2-1| + |2-2| = 2$
- $S_3 = (|1-1| + |1-2| + |1-3|) + (|2-1| + |2-2| + |2-3|) + (|3-1| + |3-2| + |3-3|) = 3+2+3 = 8$

Soit $n \in \mathbb{N}*$ on a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} |i-j| + \sum_{i=j+1}^{n} |i-j| \right)$: dans la première somme, les quantités $i-j$ sont toutes positives (car $i \geq j$) et dans la seconde elles sont toutes négatives. Donc

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{i} (i-j) + \sum\limits_{i=j+1}^{n} (j-i) \right)$. On pose $k = i-j$ dans la première somme : k décrit donc $[\![0, i-1]\!]$, et on pose $\ell = j-i$ dans la seconde : ℓ décrit donc $[\![1, n-i]\!]$

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=0}^{i-1} k + \sum\limits_{\ell=1}^{n-i} \ell \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n+1-i)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 - i + n(n+1) - 2ni - i + i^2 \right)$ donc $S_n = \frac{1}{2} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 2i^2 - 2(n+1)i + \right.$

$\frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)^2 + n^2(n+1) \right) = \frac{n(n+1)}{6} ((2n+1) - 3(n+1) + 3n) = \frac{n(n+1)}{6} (2n-2)$ finalement

$$S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Vérification (pas indispenseble)On peut vérifier avec les valeurs $n = 1, 2, 3$ que cette formule nous permet de retrouver $0, 2, 8$ comme attendu.

Exercice 3

1. Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il suffit que n soit impair. Faux : 9 est impair, mais n'est pas premier.

2. Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il faut que n soit impair. Vrai : car s'il n'est pas impair, il est alors multiple de 2, qui est différent de 1 et de lui même car $n > 2$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est nécessaire que $x = 2$. Faux, car -2 est une autre possibilité

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est suffisant que $x = 2$. Vrai, car $2^2 = 4$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est nécessaire que $x > 2$ pour que $x > 3$. Vrai, car lorsque $x > 3$ on a toujours $x > 2$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x > 3$, il est suffisant que $x > 2$. Non, par exemple $\frac{5}{2}$ est strictement supérieur à 2 mais pas à 3

Exercice 4

On va procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n = 3n$" . Initialisation : On a $u_1 = 3$ et donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 3k \\ &= \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On en déduit que $u_{n+1} = 3(n+1)$
et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : par le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 5

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z &=& 1-a & L_3 \\ y+z &=& 0 & L_2 - aL_3 \\ (1-2a)y+(1-2a)z &=& 2a^2-a & L_1 - aL_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1-a \\ y+z &=& 0 \\ a(2a-1) &=& 0 \end{array} \right.$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a \notin \{0, 1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a = 0$, le système est équivalent à $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ y+z &=& 0 \end{array} \right.$
et donc l'ensemble des solutions est $\{(1, y, -y);\ y \in \mathbb{R}\}$. Si $a = 1/2$, le système devient $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1/2 \\ y+z &=& 0 \end{array} \right.$
et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2, y, -y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition P suivante : $P = (\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < t)$.

1. On a non $p = (\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant t)$.
2. La proposition p signifie que la fonction f est majorée. Elle est vérifiée par exemple si $f(x) = \sin(x)$. Il suffit de choisir $t = 2$. Elle n'est pas vérifiée par la fonction $f(x) = x$. Sinon, il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < t$. Cela ne fonctionne pas avec $x = t + 1$.
3. (a) p_1 est équivalente à p : en effet, les variables x et t sont muettes, on peut les échanger!
   (b) p_2 est toujours fausse : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si on choisit $x = f(t) - 1$, on n'a pas $f(t) < x$.
   (c) p_3 n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Elle est vraie pour $f(x) = x$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, si on choisir $x = t - 1$, on a bien $f(x) < t$. Elle est fausse pour $f(x) = x^2$: si on choisit $t = -1$, il est impossible de trouver $x \in \mathbb{R}$ avec $x^2 < -1$. De plus, p_3 n'est pas équivalente à p car la fonction $f(x) = x$ vérifie p_3 mais pas p .
   (d) p_4 est toujours vraie : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si je choisis $x = f(t) + 1$, j'ai bien $f(t) < x$.

Exercice 7 : Une équation fonctionnelle

1. Choisissons $x = 0$ dans la relation. On a alors $f(0) = 1$. Choisissons ensuite $x = 1$ dans la relation. On a alors $f(1) + 1f(0) = 2$ qui donne $f(1) = 1$.

2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

   Si on substitue $1-x$ à x dans cette relation, on trouve que $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$.

   On a donc un système de deux équations à deux inconnues qui va nous permettre de déterminer $f(x)$ et $f(1-x)$. Si on multiplie la deuxième équation par x , on trouve : $x(1-x)f(x) + xf(1-x) = 2x - x^2$.

   On lui retranche la première équation et on trouve : $\big(x(1-x)-1\big)f(x) = -x^2 + x - 1 \implies (-x^2+x-1)f(x) = -x^2 + x - 1$.

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x^2 + x - 1 \neq 0$. En effet, le discriminant de l'équation $-x^2 + x - 1 = 0$ vaut $\Delta = -3 < 0$. Ainsi, on peut simplifier par $-x^2 + x - 1$ et on trouve que $f(x) = 1$.

3. On a démontré que si f est solution, alors f est la fonction constante égale à 1 . Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est solution. On en déduit que l'ensemble des solutions est constitué par cette fonction.