DS n°1.

Durée : 2 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre. Pensez à bien soigner la présentation ! Bon courage.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1

Déterminer tous les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ vérifie

1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Exercice 2

1. Calculer la somme suivante : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   Indication : on cherchera des constantes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
   $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j|$$

   Calculez S_1, S_2 et S_3, puis calculez S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation proposée est vraie ou fausse (et justifiez)

1. Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il suffit que n soit impair.
2. Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il faut que n soit impair.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est nécessaire que $x = 2$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est suffisant que $x = 2$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est nécessaire que $x > 2$ pour que $x > 3$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x > 3$, il est suffisant que $x > 2$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
Calculez u_2, u_3 et u_4. Conjecturez une formule générale pour u_n, puis démontrez cette conjecture.

Exercice 5

Résoudre suivant la valeur du réel $a \in \mathbb{R}$ le système suivant $\left\{\begin{array}{ccccc} ax & +(1-a)y & +(1-a)z & = & a^2 \\ ax & +(1+a)y & +(1+a)z & = & a-a^2 \\ x & +y & +z & = & 1-a \end{array}\right.$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition P suivante : $P = (\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < t)$.

1. Écrire la négation de P .
2. Donner un exemple de fonction f qui vérifie P ; et un exemple qui ne vérifie pas P .
3. Parmi les propositions ci-dessous, déterminer celles qui sont équivalentes à P , celles qui sont toujours vraies, celles qui sont toujours fausses, et celles pour lesquelles on ne peut rien dire.
   (a) $P_1 = (\exists x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) < x)$;
   (b) $P_2 = (\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(t) < x)$;
   (c) $P_3 = (\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < t)$;
   (d) $P_4 = (\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(t) < x)$.

Exercice 7 : Une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

1. On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que valent $f(0)$ et $f(1)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
3. Quelles sont les fonctions f solutions du problème?