TD 30 : Fonctions de deux variables

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Ex 1 Exemples

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$ $\quad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant y\}$

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\leqslant 1\}$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ et } y\in\mathbb{Q}\}$

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q} \text{ ou } y\notin\mathbb{Q}\}$ $\quad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$.

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x,y)\in A$, alors $0<|x-1|<1$, c'est-à-dire que $x\neq 1$ et $0<x<2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $1\notin]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ et $0<x-\varepsilon<x+\varepsilon<2$. Alors, $B((x,y),\varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A . A n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n=(1/n,0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A .
2. B est fermé. Si (x_n,y_n) est une suite d'éléments de B qui converge vers (x,y) , alors on sait que pour chaque entier n , on a $0\leqslant x_n\leqslant y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0\leqslant x\leqslant y$ et donc que $(x,y)\in B$. B n'est pas ouvert : dans toute boule contenant $(0,0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon,0)$ par exemple, avec $\varepsilon>0$).
3. C n'est pas fermé, car si $u_n=(1-\partial ac1n,1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,1)$ qui n'est pas dans C . C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0,1)$, qui est dans C , contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0,1+\varepsilon)$.
4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n,0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2},0)$ qui n'est pas élément de D . D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0,0)$, qui est élément de D , il existe des éléments qui ne sont pas dans D , par exemple les éléments du type $(0,\sqrt{2}/n)$.
5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D , n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.
6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty,4[$ par la fonction continue $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n=(2-\partial ac1n,0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2,0)$ qui n'est pas élément de F .

Ex 2 Somme d'un ensemble et d'un ouvert ou d'un fermé

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E . On définit : $A+B=\{z\in E;\ \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}$.

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\}$ et $B=\{0\}\times\mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A+B$ n'est pas fermée, pour A et B les parties de $\mathbb{R}^2$ introduites à la question précédente.

1. Commencer par le cas où B est un singleton.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
3. Observer que la première coordonnées des éléments de $A+B$ est toujours non nulle.

Dérivées partielles

Ex 3 Calcul de dérivées partielles

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y)=e^x\cos y$.
2. $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$.

Dériver par rapport à une variable comme si l'autre était constante!

Ex 4 Composition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Appliquer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Ex 5 Continue et pas de dérivées partielles

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$.

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Pour l'étude de l'existence de dérivées partielles, revenir à la définition en utilisant la limite du taux d'accroissement.

Ex 6 Dérivée suivant tout vecteur, et pas continue

Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour l'étude de la dérivée suivant le vecteur (a,b) en $(0,0)$, revenir à la définition de l'existence du nombre dérivé.

Ex 7 Exemples

Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles de classe C^1 ?

1. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
3. $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon.

Recherche d'extrema

Ex 8 Extrema

On pose $f(x,y) = x^2+y^2+xy+1$ et $g(x,y) = x^2+y^2+4xy-2$.

1. Déterminer les points critiques de f , de g .
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f .
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g .

Si (x,y) est un point critique de f , il vérifie donc le système $\begin{cases} 2x+y &= 0 \\ x+2y &= 0 \end{cases}$

$(0,0)$ est donc le seul point critique de f . Un raisonnement tout à fait similaire montre que $(0,0)$ est aussi le seul point critique de g .

Les extrema locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si $(0,0)$ est un extrémum local. $f(x,y) = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geqslant 1 = f(0,0)$.

Ainsi, $(0,0)$ est un extrémum local, et même global, de f .

Ici aussi, il suffit de déterminer la nature de $(0,0)$. On a $g(0,0) = -2$. On a également, pour $x \neq 0$, $g(x,0) = x^2 - 2 > g(0,0)$ et $g(x,-x) = -2x^2 - 2 < g(0,0)$. Ainsi, aussi près de $(0,0)$ qu'on veut, g prend des valeurs (strictement) supérieures et (strictement) inférieures à $g(0,0)$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de g . Comme $(0,0)$ est le seul point critique de g , g n'admet pas d'extrémum local.

Ex 9 Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

On doit commencer par rechercher les points critiques. Ensuite, pour chaque cas, on doit adopter une méthode particulière : changement de variables, étude sur des droites proches, début du développement d'un carré.

Ex 10 Extrema locaux et globaux

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y\left(x^2 + (\ln y)^2\right)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

La recherche des extrema locaux se fait suivant la méthode habituelle. Pour étudier l'existence d'un extremum global, on pourra étudier $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ et démontrer que ceci garde un signe constant, ou bien étudier le comportement de f aux bord de l'ensemble de définition.