TD 29 : Lois discrètes usuelles

Loi uniforme

Ex 1 Soit X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

1. (a) Montrer que $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \mathrm{P}(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   (b) Montrer que $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket, \mathrm{P}(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

   (b) Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?

   (c) Calculer $\mathrm{P}(X+Y+Z=n+1)$.

Ex 2 Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,X \rrbracket)$. Déterminer la loi de probabilités de Y ainsi que son espérance.
Appliquer la FPT avec le SCE $(\{X=1\},\{X=2\},\ldots,\{X=n\})$

Ex 3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$
Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1-p$.
A l'instant initial la puce est à l'origine.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la position, D_n le nombre de sauts à droite et G_n le nombre de sauts à gauche de la puce à l'instant n.

   (a) Déterminer les lois de D_n et G_n. Déterminer $\mathrm{E}(D_n)$ et $\mathrm{E}(G_n)$.

   (b) Déterminer une relation entre X_n, G_n et D_n. En déduire X_n en fonction de D_n.

   (c) En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

2. Supposons que $p = \frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la puce soit l'origine à l'instant $2k$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note N_n la variable aléatoire égale au nombre de passages à l'origine entre l'instant 0 et l'instant n. Calculer l'espérance de N_n et donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}(\llbracket 0,N \rrbracket)$.
On pose $Z = |X-Y|$ et $T = \min(X,Y)$.

1. Déterminer les lois de Z et de T.

2. Calculer $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(T)$.

3. Calculer $\mathrm{P}(T \geqslant k)$ puis retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(T)$.

Loi de Bernoulli

Ex 5 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$. On considère $Y_i = X_iX_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Trouver $\mathrm{E}(S_n)$ et $\mathrm{V}(S_n)$.

Ex 6 Loi de succession de Laplace
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}(\llbracket 0,N \rrbracket)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $n+1$ variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(\frac{Y}{N})$.

1. Quelle est la probabilité que $X_{n+1} = 1$ sachant que $X_1 = \cdots = X_n = 1$?
2. Donner la limite de cette probabilité quand N tend vers $+\infty$.

Loi binomiale

Ex 7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(2, \frac{1}{2})$.
Soit $Z = \sqrt{|X^2 - Y^2|}$. Calculer $\mathrm{E}(Z)$.

Ex 8 Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

1. Soit $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$. Formule de transfert
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \dfrac{a^X}{2n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{2n} \times \frac{1}{2^n}$

Ex 9 Mode de la loi binomiale
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\mathrm{P}(X = k)$ est maximale. Poser $u_k := \mathrm{P}(X = k)$ et étudier la monotonie de la suite en comparant u_{k+1}/u_k avec 1.

Ex 10 Une urne contient trois sortes de boules dont les proportions sont notées p_1, p_2 et p_3. On tire successivement avec remise n boules.
Soient X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales aux nombres de boules de chaque sorte obtenues dans l'échantillon de n boules. On désigne par Z la variable aléatoire

$$Z = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

1. Déterminer la loi de Z sachant que $X_1 + X_2 = s$ avec $s \in \mathbb{N}^*$.
   L'univers image est $\{\frac{k}{s}, k \in \llbracket 0; s \rrbracket\}$. Calculer pour tout k entre 1 et s la valeur $\mathrm{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = s)$ qui vaut $\frac{\mathrm{P}(X_1=k\cap X_2=s-k)}{\mathrm{P}(X_1+X_2=s)}$.
   Par ailleurs, on peut remarquer que $X_1 + X_2$ suit une loi biomiale de paramètres n et $p_1 + p_2$
2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable conditionnelle.

Ex 11 Inégalité de Chernoff (1952), borne de Hoeffding (1963)
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p)$. On se donne $t \in \,]0,1[$.

1. En appliquant l'inégalité de Markov à $\exp(\lambda X)$, montrer que
$$\forall \lambda \geqslant 0, \mathrm{P}(X \geqslant nt) \leqslant \left[(pe^{\lambda} + (1-p))e^{-\lambda t}\right]^n$$
2. Montrer que si $t \geqslant p$ alors il existe une valeur de λ qui rend minimale $f(\lambda) = \ln(pe^{\lambda} + (1-p)) - \lambda t$.

3. Soit $D = t\ln\frac{t}{p} + (1-t)\ln\frac{1-t}{1-p}$. Montrer que $D \geqslant 0$ et $D = 0$ ssi $t = p$.
4. En déduire que si $t > p$ alors $\mathrm{P}(X \geqslant nt) \leqslant e^{-Dn}$.
5. En déduire que si $t < p$ alors $\mathrm{P}(X \leqslant nt) \leqslant e^{-Dn}$ (On pourra utiliser la variable $n - X$).
6. En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \mathrm{P}(|X - np| \geqslant n\varepsilon) \leqslant 2e^{-Cn}$$
Comparer à la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.