TD 28 : Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Ex 1 Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $\forall (f,g) \in \mathscr{C}^1([0,1])^2, < f,g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\forall \vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{v}(x',y') \in \mathbb{R}^2, < \vec{u},\vec{v} >= xx' + 3yy' - xy' - yx'$

Ex 2 On définit l'application $<,>$ suivante

$$\forall \vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{v}(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, < \vec{u},\vec{v} >= xx' + 2yy' - zz' + 6(xy' + x'y)$$

$<,>$ constitue-t-elle un produit scalaire pour $\mathbb{R}^3$?

Ex 3 Soient $(\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i\right|\right|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} ||\vec{x}_i||^2$$

Orthogonalité

Ex 4 Soit $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

1. Montrer que $< f,g >= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0_{2\pi}$
2. Montrer que la famille $(f_n : x \mapsto \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée pour $<,>$. Utiliser les formules trigonométriques pour transformer le produit en somme

Ex 5 Soit $<,>$ l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, < A,B >= \mathrm{tr}\,({}^tA.B)$$

1. Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.
2. Montrer que la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour $<,>$.
3. Prouver que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux pour $<,>$.

Ex 6 Soit $||.||$ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ ||P||^2 = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2$$

1. Montrer que $||.||$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}_2[X]$. Pour le produit scalaire $P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$. Pour non dégénéré : si P, P' et P'' s'annulent en 0, 0 est donc racine triple, et avec le degré, conclure
2. Soit $F = \mathrm{vect}\,(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$. Déterminer $F^\perp$. Appartenir à l'orthogonal signifie être orthogonal à ces 2 polynômes, ce qui nous donne un système

Orthonormalisation de Schmidt

Ex 7 On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $<,>$ par :

$$< P, Q >= P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, puis en donner une base orthonormale. Pour non-dégénéré : si P s'annule en 3 points, il a 3 racines, conclure avec le degré

Ex 8 Polynômes interpolateurs de Lagrange

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application $<,>$ par : $\quad < P, Q >= \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$

1. Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pour non-dégénéré : si P s'annule en $0, 1, 2, 3, .., n$ il a $n+1$ racines, conclure avec le degré
2. Montrer que la famille des polynômes interpolateur de Lagrange $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $<,>$ puis donner les coordonnées dans cette base d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $< L_i, L_j >$. Ensuite, utiliser que $< P, L_i >= P(i)$

Ex 9

1. On pose : $\quad \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, < P, Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t.$
   Démontrer que l'application $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Pour non-dégénérée : Utiliser le thm de l'intégrale nulle sur $[-1, 1]$. Si un polynôme s'annule sur un intervalle, son nb de racines est alors infini, conclure
2. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire et le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Appliquer Gram Schmidt
3. En déduire $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2 - at - b)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ On cherche le polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ pour lequel la distance à X^2 est minimal, cela s'obtient lorsqu'on choisit le projeté de X^2.. Caluler ce projeté est sumple, à condtion d'avoir une BON

Ex 10 En vous inspirant de l'exercice précédent, calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{0}^{1} (e^x - (ax+b))^2 \, \mathrm{d}x.$

Projection orthogonale

Ex 11 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale

1. sur le plan (P) engendré par les vecteurs $\vec{u}(1, 2, 1)$ et $\vec{e}_3$. Appliquer Gram Schmidt pour trouver une BON de ce plan. Une fois qu'on a une BON, calculer les projetés de e_1 e_2 et e_3 est plus simple et nous donne les 3 colonnes de la matrice
2. sur la droite (D) dont un vecteur directeur est $\vec{v}(-1, 2, 2)$. Même chose : normaliser le vecteur pour avoir une BON

Ex 12 Déterminer les projetés orthogonaux sur le plan (Π) d'équation $x + 2y - 3z = 0$ des vecteurs $\vec{u}(2, -1, 0)$, $\vec{v}(-2, -4, 6)$ et $\vec{w}(-1, 1, 0)$.

Ex 13 Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Donner l'expression analytique de la réflexion

1. par rapport au plan (Π) d'équation $x + 2y + 2z = 0$. L'équation de ce plan nous donne un vecteur normal : $(1, 2, 2)$. Ce vecteur normal dirige donc la droite qui est l'orthogonal de ce plan, et si l'on connaît le projeté sur cette droite, on peut en déduire la reflexion par rapport au plan
2. échangeant les vecteurs $\vec{a}(1, -1, 2)$ et $\vec{b}(2, 1, 1)$. La droite orthogonale au plan de reflexion est donc dirigée par $\vec{b} - \vec{a}$, puis faire comme pour la question 1