

Exercice 47

TABLE
Jolan
MPSE
ST-GERMAIN
Aure

On s'intéresse à $S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$

$$f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

On a f est bien décroissante
car $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$
croissantes et positives sur $]1, +\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ on a $x \in [k, k+1]$

$$\text{donc } f(x) \leq f(k) \leq f(x-1) \text{ i.e. } \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

en opérant sur
un
déplacement d'indice

$$\text{donc } \sum_{k=3}^n \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \right) \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \sum_{k=3}^n \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln(x)} dx \right)$$

$$\text{donc } \int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq S_n \leq \int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$\text{Or: } \int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_2^n \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \times \frac{1}{\ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)) \right]_2^n$$

$$= \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

↳ on ne peut rien en déduire

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)) \right]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc par comparaison, S est divergente.

* Équivalent de S_n ?

$$\text{On a } \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

$$\text{et } \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

$$\text{Donc } S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)) \checkmark \text{ ça m'a l'air pas trop mal}$$

Exercice 6

(x ∈ ℝ)

TABLE
Jolan
MPSI
ST-GERMAIN
Aure

1. L'intégrale a $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} \times \frac{1}{x^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \times \int_0^1 t^{xk} dt \right)$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{xk} dt \quad \checkmark$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=0}^n \left((-1)^k t^{xk} \right)}_{\text{forme de } S_n} dt \quad \checkmark$$

$x \neq 0$
Or, $t \in]0, 1[$ donc
 $-t^x \neq 1$

② a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$$

$S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$

$$= \int_0^1 \frac{(-t^x)^{n+1}}{1+t^x} dt$$

↓
Cette qui tend vers 0
lorsque $n \rightarrow +\infty$.