

TD 26. Series numériques

TABLE
Jolan
MPST
St-GERMAIN
Aure

Exercice 1

① $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

On pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le terme général de S_1

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, et $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ ✓

Ainsi S_1 est de même nature que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ✓ qui est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha > 1$)

② $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n}$

On pose $u_n = \frac{n^2}{n^3 + n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le terme général de S_2

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et, puisque $n^3 + n \sim n^3$, $u_n = \frac{n^2}{n^3 + n} \sim \frac{1}{n}$

Ainsi, S_2 est de même nature que $\sum \frac{1}{n}$, qui est divergente ✓ (série harmonique)

③ $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$. On sait d'après les croissances comparées que $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$, i.e. $\ln(n) = o(n)$

on prouve et surtout, i.e. $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ { (si $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$, $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \rightarrow 0$)
Or, $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ ✓ est divergente également.

④ $S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)$

On pose $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\cos(x) \leq 1$, i.e. $\cos(x) - 1 \leq 0$
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 0$, et donc, $|u_n| = -u_n$.

On s'intéresse à $-u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
On a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

Ainsi, $-u_n = |u_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ ✓, et $|u_n| > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$,

donc $\sum |u_n|$ est de même nature que $\sum \frac{1}{2n^2}$ ✓, série de Riemann $\alpha = 2 > 1$
i.e. convergente

Ainsi, $\sum |u_n|$ est convergente, donc $S_4 = \sum u_n$ converge absolument,
donc $\sum u_n$ converge. ✓ (S_4 convergente)

⑤ $S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{2^n + n}$

On pose $u_n = \frac{2n^3}{2^n + n}$. On va s'intéresser à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a $u_n = \frac{2n^3}{2^n + n}$

Or, $2^n + n \sim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$, d'où $n^2 u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ✓

D'où puisque $\exists x > 1 / n^x u_n \rightarrow 0$ (en l'occurrence on a pris $x=2$)

alors $\sum u_n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ (S_5 convergente) ✓

⑥ $S_6 = \sum \left(\arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4} \right)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $u_n = \arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$

On a $\forall n > 1$, $\arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) > 0$ (fonction conservant le signe de l'abscisse)

On choisit $u_0 = 0$ et $u_1 = 0 \rightarrow$ en modifiant un nombre fini de termes, on ne change pas la nature de S_6 .

Alors on a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$, et doc, on peut désormais chercher un équivalent.

On a $\frac{n+1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on va donc s'intéresser à un DL de $\arctan$ en 1. Pour $u \rightarrow 1$, $\arctan(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan'(1)}{k!} (u-1)^k + o_1((u-1))$
 $= \frac{\pi}{4} + \frac{(u-1)}{2} + o_1(u-1)$ ✓

Donc $\arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right)}{2} = \frac{1}{n-1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

d'où $\sum u_n$ est de même nature que $\sum_{n>1} \frac{1}{n-1}$

d'où $\sum u_n$ est divergente
 $\hookrightarrow$ i.e. S_6 divergente.

$\sum_{n>1} \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$
 $\rightarrow$ divergente
 (car série harmonique)

Oui

$$8) \sum \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(n)} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \ln^2(n)}$$

Série de Bertrand

Donc la série diverge. ✓

$$9) \sum \frac{1}{n^3 \ln(n)} \text{ donc la série converge } \checkmark \text{ (Série de Bertrand)}$$

$$10) \forall n \in \mathbb{N} \text{ on définit } u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n! \times (n+1) \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!}$$

c'est pas bon parce que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow 1$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\text{et } \frac{n}{n+1} < 1 \text{ donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1^n \text{ ie } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

donc d'après la règle de D'Alembert $\sum u_n$ converge

$$11) \forall n \in \mathbb{N} \text{ on définit } u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\text{ie } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n(n+1)!)^2 \times (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} < \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}$$

Faire un équivalent: $\sim \frac{n^2}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4}$

et on a $\frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ donc d'après la règle de D'Alembert $\sum u_n$ converge ✓

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \exp\left(-n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-n \times \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1 + o(1))$$

$$\text{donc } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-1}$$