

Ecole de TD n

Exercice 10:

MORILLEAU

Loup

ODON

Guillaume

$$U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n))$$

$$\text{car } \ln(\ln(n)) = \sum_{k=3}^n [\ln(\ln(k)) - \ln(\ln(k-1))] + \ln(\ln(2))$$

$$= \ln(\ln(2)) + \sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{\ln(k)}{\ln(k-1)}\right)$$

$$\text{donc } U_n = \sum_{k=3}^n \left[\frac{1}{k \ln(k)} - \ln\left(\frac{\ln(k)}{\ln(k-1)}\right) \right] + \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2))$$

Trouvons un $\sim$ de a_k en $+\infty$

$$a_k = \frac{1}{k \ln(k)} + \ln\left(\frac{\ln(k-1)}{\ln(k)}\right)$$

$$b_k = \ln\left(\frac{\ln(k) + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

Petit σ
quand
 $k \rightarrow +\infty$

$$b_k = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)} + \sigma_{+\infty}\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

$$b_k = \frac{-\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \sigma_{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\ln(k)} + \sigma_{+\infty}\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

$$\text{donc } a_k = \frac{1}{k \ln(k)} - \frac{1}{k \ln(k)} + \frac{1}{2k^2 \ln(k)} + \sigma_{+\infty}\left(\frac{1}{k^2 \ln(k)}\right) + \sigma_{+\infty}\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

$$\text{Ainsi } U_n = \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{2k^2 \ln(k)} \right) + \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2))$$

La somme converge car c'est une série de Bertrand avec $\alpha > 1$
Donc la suite converge

Ce petit σ est un petit σ de $\frac{1}{k \ln(k)}$

donc ce n'est pas suffisant
il faut ajouter un terme $-\frac{u^2}{2} + o(u^2)$