

Izéquel Gaël
Lebon Grégory
Seymour Mattéo

TD 26

Ex 1:

1) On a :

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \checkmark$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$: d'après les séries de Riemann, $\checkmark$
la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
converge aussi. $\checkmark$

$$2) \quad \cancel{\frac{n^2}{n^3+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{\frac{1}{n}} \quad \checkmark$$

Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc
 $\sum \frac{n^2}{n^3+n}$ diverge. $\checkmark$

3) $\left(\sum \frac{1}{\ln(n)} \right)$ est une série de Bertrand

avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

ie $\alpha < 1$ donc $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge $\checkmark$

5) $u_n = \left(\frac{2^n}{2^n + n} \right)_{n \geq 1}$ est une suite à termes strictement positifs donc on peut utiliser le critère de d'Alembert:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} + (n+1)}}{\frac{2^n}{2^n + n}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} + (n+1)} \times \frac{2^n + n}{2^n} \\ &= \frac{2^n + n}{2^{n+1} + n+1} \times \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{\cancel{2^n} \left(1 + \frac{n}{2^n}\right)}{2 \times \cancel{2^n} \left(1 + \frac{n+1}{2^n}\right)} \times \frac{2 \cancel{2^n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{2^n} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ ✓

On a alors $\sum u_n$ convergente. ✓

9) $\sum \frac{1}{n^3 \ln(n)}$ est une série de Bertrand avec $\alpha > 1$

donc convergente
Bien

12) Idem; $\alpha = 0$ et β donc divergente ✓