CORPETTI Nola
DAROUECHE Lilah
GIOIA Ethan
CHARAFOUDINE Allan

03/06/2025

Exo 11

(a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ et $u_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ n^2

En divisant par n^2, on a $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$

On pose $f: \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ avec $x = \frac{k}{n}$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Donc, u_n converge vers $\frac{\pi}{4}$

(b) $u_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m^2+k^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{k}{m}}{1+(\frac{k}{m})^2} = \frac{1-0}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{k}{m}}{1+(\frac{k}{m})^2}$

On pose $f \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$ avec $x = \frac{k}{n}$

Comme f est continue sur $[0, 1]$ on a :

$u_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\ln(2)) = \frac{\ln(2)}{2}$

(c) $u_n = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2^n})$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k/n} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k/n}$

On pose $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2^x \end{cases}$ avec $x = \frac{k}{n}$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x\ln(2)} dx$$ ✓

$$= \left[\frac{e^{x\ln(2)}}{\ln(2)}\right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$$ ✓

d) $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - (\ln(n!) + n\ln(n))\right)$$ ✓

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(n)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) + \cancel{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)} - \sum_{k=1}^{n} \ln(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k+n) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$ ✓ ✓

On pose $f \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) \end{cases}$

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$ ✓

I.P.P : $u' = 1$ $\quad v = \ln(1+x)$

$u = t$ $\quad v' = \frac{1}{1+x}$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{1+x}\,dx$$ ✓

$$= \ln(2) - \int_1^2 \frac{u-1}{u}\,du = \ln(2) - \int_1^2 1\,du + \int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln(2) - 1 + \ln(2) = 2\ln(2) - 1.$$

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln(2) - 1$$ ✓