AMOURDOM MARIAYE Noémie MPSI
ANDRIAMBELO Hanitiana

TD25 Intégration sur un segment

Exercice 10 :

$$I_1 = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(Somme de Riemann)

$$I_1 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Plutôt $n(n+1)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^2 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^2 = e^2 - 1$$

$$I_2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{2-0}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2k}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^k$$

somme de suite géométrique de raison $e^{\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \times e^{\frac{2}{n}} \frac{1-e^2}{1-e^{\frac{2}{n}}}$$

- DL 1 en $+\infty$: $e^{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)$

$$e^{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n+2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\cancel{\text{Donc } I_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \frac{1-e^2}{1-\frac{n+2}{n}}}$$

$$\cancel{= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+2)}{n(n-n+2)} \times (1-e^2)}$$

$$\cancel{= \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}}$$

$$\text{Donc } I_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} \times e^{\frac{2}{n}} \times \frac{1-e^2}{1-\frac{n+2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{2}{n}} e^{\frac{2}{n}} \times \frac{1-e^2}{\cancel{-\frac{2}{n}}}$$

$$I_2 = e^2 - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt = \left[\sin(t)\right]_0^{\pi} = 0$$ ✓

$$I_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$ ✓

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} Re\left(\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k\right)$$ ✓

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} Re\left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k\right)$$ ✓

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} Re\left(e^{i\frac{\pi}{n}} \times \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)$$ ✓

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} Re\left(\frac{2\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{n\left(1-\left(1+\frac{i\pi}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} Re\left(\frac{2\cancel{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{n}}}{-i\cancel{\pi}}\right)$$ ⚠

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} Re\left(+i2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(0) = \boxed{0}$$ ✓