

TD 25 Intégration sur un segment

T.B

Exercice 1:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 / \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \\
 \Leftrightarrow & \forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 / (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\geq 0} \geq a+b \\
 \Leftrightarrow & \text{Vrai.} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ On a } f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x}$$

On a $f|_{[0,1]}$ est continue : ie $\sqrt{x}$ est continue sur son segment $[0,1]$
donc d'ap. le thm de Heine $\checkmark$ $f|_{[0,1]}$ est u.c.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq 1$
car $\sqrt{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{++}$

Donc d'ap. l'I.A.F. on a $\forall (x,y) \in [1, +\infty[$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \times 1$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, on choisit $\eta = \varepsilon / \forall (x,y) \in [1, +\infty[$
 $|x - y| \leq \eta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Donc f sur $\mathbb{R}^+$, $+\infty[$ est aussi u.c. $\checkmark$

Conc. : f est u.c sur $\mathbb{R}^+$

Vrai.

En 0, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ✓ ce qui n'est pas majorable par une constante k ✓
donc f n'est pas k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ ✓