Interro du 20 juin

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Proposition (Développement par rapport à une colonne/ligne)

Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

(où $\delta_{i,j}$ est le mineur d'indice i, j de la matrice A.)

Proposition 2 Déterminant de Vandermonde

Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ij} = x_i^{j-1}$. On appelle déterminant de Vandermonde d'ordre n le déterminant de A et on le note $V_n(x_1, \dots, x_{n-1})$.

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

Proposition 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors

$$A \times \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T \times A = \det(A) I_n$$

Définition 1 Produit scalaire

Forme bilinéaire symétrique définie positive (et donner la définition de chacun de ces termes)

Proposition 4 Identités remarquables

Pour tout $(x,y) \in E^2$,

- $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x,y >$ Formule d'Al-Kâshi
- $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2 < x,y >$
- $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ Identité du parallélogramme
- $< x,y > = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$ Identité de polarisation

Définition 2 Famille orthogonale/orthonormale

Donner les définitions

Proposition 5 Produits scalaires usuels

Savoir donner un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathscr{C}^0([a,b])$

Définition 3 Distance

Définir une norme euclidienne associé à un produit scalaire et une norme associée à une distance

Proposition 6

Soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs de E. Si $x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i$, alors

1. $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = < x,\varepsilon_i >$
2. $< x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$ avec $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
3. $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX$

Proposition 7

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. .
- $\{0_E\}^\perp = E$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- Si F est un sous-ev de dimension fini de E, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.
- Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
- On a $F^\perp = \operatorname{vect}(F)^\perp$

Proposition 8

Soit E est ev euclidien alors
- $\left(F^\perp\right)^\perp = F$
- $E^\perp = \{0_E\}$
- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

À savoir faire

- ☐ calculer un déterminant : si une ligne ou colonne comporte beaucoup de 0, développer par rapport à celle-ci. Sinon, appliquer l'algorithme du pivot de Gauss