Séries - Familles sommables

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Savoir aussi montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple (série harmonique)

Proposition 2 Théorème de comparaison par majoration/minoration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. On a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 3 Comparaison série intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge ssi $\left(\int_1^n f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Proposition 4 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelé **série de Riemann**, converge ssi $\alpha > 1$.

Proposition 5 Lemme de Convergence logarithmique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang

$$u_n > 0, v_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 6 Règle de D'Alembert

On pourra utiliser le lemme précédent en le citant mais sans le démontrerSoit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ alors on ne peut rien dire on donnera un exemple pour lequel la série converge et un pour lequel elle diverge

Proposition 7 Convergence absolue - Inégalité triangulaire

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge. De plus, $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

Proposition 8 Théorème des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. Alors

- la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge, vers une limite notée S vérifiant $S\geq 0$
- pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, en définissant $R_n=S-S_n$, on vérifie que R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.
- pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|R_n|\leq u_{n+1}$.

Définition 1 Somme d'une famille de réels positifs - Famille sommable

Soit I un ensemble **quelconque**.

- Si $(u_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}^+)^I$. On définit la somme $\sum_{i\in I}u_i$ de la manière suivante :

$$\sum_{i\in I}=\sup\left\{\sum_{i\in J}u_i, J\subseteq I\text{ fini.}\right\}$$

- Si $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$ on dit qu'elle est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$. Dans ce cas, on définit

$$\sum_{i\in I}u_i:=\left(\sum_{i\in I}\operatorname{Re}(u_i)^+-\sum_{i\in I}\operatorname{Re}(u_i)^-\right)+i\left(\sum_{i\in I}\operatorname{Im}(u_i)^+-\sum_{i\in I}\operatorname{Im}(u_i)^-\right).$$

:on justifiera bien que les 4 sommes en question existent bien.

Proposition 9 Propriété de la somme.

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs. Soient λ,μ deux scalaires positifs. Alors

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i.$$

Proposition 10 Théorème de Fubini (version positive)

On suppose que $I = J \times K$. Soit $(u_{j,k})$ une famille de réels positifs, alors

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} u_{j,k} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} u_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} u_{j,k}.$$

On utilisera le théorème de sommation par paquets (version positive) sans le démontrer

Proposition 11 Invariance par permutation - version positive **&** version sommable

Soit I un ensemble d'indices et σ une permutation de l'ensemble I

- Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$. Alors on a $\sum\limits_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum\limits_{i\in I} u_i$.
- Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable, alors la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est aussi sommable et l'on a $\sum\limits_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum\limits_{i\in I} u_i$.

À savoir faire

- ☐ Déterminer la nature d'une série : on étudie la limite de u_n : si le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement. Sinon : on cherche un équivalent simple du terme général u_n au voisinage de $+\infty$, pour montrer que la nature est la même que celle d'une série connue (série de Riemann, série de Bertrand, série géométrique)
- ☐ Savoir appliquer le théorème des séries alternées
- ☐ savoir comparer une série à une intégrale lorsque le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ avec f une fonction décroissante.
- ☐ Utiliser le théorème de Fubini : une condition pour l'appliquer est : famille de réels positifs.

Ce qu'en dit le programme

Procédés sommatoires discrets

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

e) Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$.	
Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.	
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I=\mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	La démonstration est hors programme.

f) Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\displaystyle\left\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \right\rvert \leqslant \varepsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	La démonstration est hors programme.
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.