

Mardi 29 avril 2025

TD 23: Variables aléatoires réelles.

Exercice 6: Z est à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ✓

• L'évènement ($Z = 0$):

→ possibilités:

1-1	4-4
2-2	5-5
3-3	6-6

 } Les possibilités
sont des couples:
(1,1), ..., (6,6).

$$IP(Z = 0) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 6 = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

• L'évènement ($Z = 1$):

→ possibilités:

6-5	5-4	4-3	3-2	2-1
5-6	4-5	3-4	2-3	1-2

$$IP(Z = 1) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 10 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \quad \checkmark$$

• L'évènement ($Z = 2$):

→ possibilités:

6-4	5-3	4-2	3-1
4-6	3-5	2-4	1-3

$$IP(Z = 2) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 8 = \frac{8}{36} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \quad \checkmark$$

• L'évènement ($Z = 3$):

6-3	5-2	4-1
3-6	2-5	1-4

→ possibilités:

$$IP(Z = 3) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 6 = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

• L'évènement ($Z = 4$):

→ les possibilités:

6-2	5-1
2-6	1-5

$$IP(Z = 4) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 4 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \checkmark$$

possibilités
 $\overbrace{6-1}^{6-1}$
 • L'évènement $(Z=5)$:

$$\boxed{IP(Z=5) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times 2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}}$$
 ✓

On a bien $\forall i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, IP(Z=i) \geq 0$
 et $\sum_{i=0}^5 IP(Z=i) = 1$.

On en déduit que loi de probabilité de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} IP(Z=0) &= \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \\ IP(Z=1) &= \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \\ IP(Z=2) &= \frac{2}{9} = \frac{8}{36} \\ IP(Z=3) &= \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \\ IP(Z=4) &= \frac{1}{9} = \frac{4}{36} \\ IP(Z=5) &= \frac{1}{18} = \frac{2}{36} \end{aligned}$$

• $\boxed{E(Z) = \sum_{i=0}^5 i \cdot IP(Z=i)}$: par déf de l'espérance.

$$\begin{aligned} &= 0 \times IP(Z=0) + 1 \times IP(Z=1) + 2 \times IP(Z=2) \\ &\quad + 3 \times IP(Z=3) + 4 \times IP(Z=4) + 5 \times IP(Z=5) \\ &= \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} \\ &= \frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18} \\ &= \boxed{\frac{35}{18}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

• $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

or d'après la formule de transfert :

$$\boxed{E(Z^2) = 0^2 \times IP(Z=0) + 1^2 \times IP(Z=1) + 2^2 \times IP(Z=2) + 3^2 \times IP(Z=3) + 4^2 \times IP(Z=4) + 5^2 \times IP(Z=5)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{18} + 4 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{9} + 25 \times \frac{1}{18} \\
 &= \frac{5}{18} + \frac{16}{18} + \frac{27}{18} + \frac{32}{18} + \frac{25}{18} \\
 &= \frac{105}{18} = \frac{3 \times 35}{3 \times 6} = \boxed{\frac{35}{6}} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned}
 \boxed{V(Z)} &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\
 &= \frac{105}{18} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 \quad \checkmark \\
 &= \frac{105 \times 18}{18^2} - \frac{35^2}{18^2} \\
 &= \frac{1890 - 1225}{324} \\
 &= \boxed{\frac{665}{324}} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 105 \\
 \times 18 \\
 \hline
 840 \\
 + 1050 \\
 \hline
 1890
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 35 \\
 \hline
 175 \\
 + 1050 \\
 \hline
 1225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 18 \\
 \times 18 \\
 \hline
 144 \\
 + 180 \\
 \hline
 324
 \end{array}$$