

Exercice rédigé : TD 23

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, n\}$ telle que :

$$\forall k \in \{0, n\}, P(X=k) = \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}$$

On a : $\sum_{k=0}^n P(X=k) = 1$ ✓

d'où $\sum_{k=0}^n \frac{a}{k+1} \binom{n}{k} = 1$

i.e. ~~a~~ $a = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}}$ ✓

Calculons $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

On a : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ ✓

En intégrant : $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ ✓
primitive

En évaluant en 1, on obtient : $\frac{2^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$ ✓

d'où $a = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ ✓

Ainsi, $P(X=k) = \frac{n+1}{2^{n+1}(k+1)} \binom{n}{k}$

$\forall k \in \{0, n\}$

Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \frac{n+1}{2^{n+1}(k+1)} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donc: $E(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$ ✓

$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n k \binom{n+1}{k+1}$ ✓

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ ✓

d'où: $\sum_{k=0}^n k \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^{(1)} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k+1}^{(2)}$ ✓

On s'intéresse à ①:

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

En dérivant: $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$

En évaluant en 1: $n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$ ✓

On s'intéresse à ②:

$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k+1} = \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1}$ ✓

$= \sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n}{j} - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j}$ en posant $j = k+1$

$= \left(\sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} \right) - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}$ car $\binom{n}{n+1} = 0$ et $\binom{n}{0} = 0$

$= n 2^{n-1} - (2^n - 1)$ ✓

$= n 2^{n-1} - 2^n + 1$ ✓

Au type méthode:

$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} k$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (k+1) - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1}$
 $= (2^{n+1} - 1) - (2^{n+1} - 1)$

Même formule que pour

$$\text{Ainsi; } E(x) = \frac{1}{2^{n+1}} (n2^n - 2^n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}} (2^n(n-1) + 1) \\ = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Calculons maintenant la variance :

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Calculons $E(x^2)$ grâce à la formule de transfert

$$E(x^2) = \sum_{k=0}^n k^2 P(x=k) \quad \checkmark \\ = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n+1}{k+1} \quad \checkmark$$

$$\text{En posant } j=k+1, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)^2 \binom{n+1}{j} \quad \checkmark$$

$$\text{d'où } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 \binom{n+1}{j} - 2 \sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n+1}{j} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \quad \checkmark$$

$$\text{or: } \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} - 1 \quad \checkmark$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n+1}{j} = (n+1)2^n \quad \checkmark \text{ d'après ce qu'on a trouvé précédemment}$$

$$\text{Calculons } \sum_{j=1}^{n+1} j^2 \binom{n+1}{j} = \sum_{j=1}^{n+1} (j(j-1) + j) \binom{n+1}{j} \quad \checkmark$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} j(j-1) \binom{n+1}{j} + \sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n+1}{j} \quad \checkmark$$

$$= \sum_{j=0}^n j(j-1) \binom{n+1}{j} + \sum_{j=0}^n j \binom{n+1}{j} \quad \checkmark$$

pour ensuite avoir la formule avec les termes 0 et n+1 sont nuls avec $\binom{n+1}{j}$, il faudrait remplacer n par n+1.

~~Rem: on avait déjà vu plus direct en utilisant $\sum_{j=0}^n$~~

$$\text{or } \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} = n 2^{n-1}$$

On s'intéresse à $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1)$; on sait que:

$$(x+1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j$$

donc $n(x+1)^{n-1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j x^{j-1}$ en dérivant

donc $n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} j(j-1) x^{j-2}$

En évaluant en 1, on obtient:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1) = n(n-1) 2^{n-2} \quad \checkmark$$

D'où: $\sum_{j=1}^{n+1} j^2 \binom{n+1}{j} = n(n-1) 2^{n-2} + n 2^{n-1}$
 $= n((n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1})$

Il faudrait remplacer n par $n+1$ dans ces expressions.

Résultats à recalculer.

Ainsi: $E(x^2) = \frac{1}{2^{n+2}} (n((n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1}) - (n+1) 2^{n+1} + 2^{n+2} - 1)$
 $= \frac{1}{2^{n+2}} (n((n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1}) - 2^{n+1})$

De plus: $[E(x)]^2 = \frac{1}{2^{2n+2}} (2^{2n} (n^2 - 2n + 1) + 2^{n+2} (n-1) + 1)$

d'où $V(x) = \frac{1}{2^{2n+2}} (2^{2n} (n^2 - 2n + 1) + 2^{n+2} (n-1) + 1)$
 $- \frac{1}{2^{n+2}} (n((n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1}) - (n+1) 2^{n+1} + 2^{n+2} - 1)$