

Samia
Mathilde

TD 23 : Variables aléatoires

Exercice 1: Fait comme un rat.

1) On a $P(X=1) = \frac{1}{4}$ 1^{er} essai : mauvaise porte
 $P(X=2) = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$ → 2^e essai : bonne porte

F.P.C.:

Note
B_k: la k^e porte
est bonne

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

alors
 $\{X=2\} = \overline{B_1} \cap B_2$

puis

$\{X=3\} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$
etc.

On a donc

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Donc $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P(X=x_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i = \frac{1}{4} \times \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ ✓

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{4} (1+4+9+16) - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$= \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4} \quad \checkmark$$

Pour comprendre

x^2	1	4	9	16
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$

1/2

Astuce : $\sum_{k=0}^n kx^k$: On pose $f: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ dériver

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \quad (\text{et on multiplie par } x \text{ ensuite})$$

F.P.C avec

$$Y \in \mathbb{N} =$$

$$B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap B_k \quad P(Y=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\text{toutes les mauvaises portes, } n \text{ fois})$$

$$P(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(\bar{B}_i) \times P(B_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{4} \quad (\text{la bonne porte dès le 1er essai})$$

$$P(Y=2) = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow 2^{\text{e}} \text{ essai: réussi}$$

on conjecture:

$$P(Y=n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

Donc

y	0	1	2	3	...	n
$P(Y=y)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{1}{4}$	...	$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$

$$\text{Donc } E(Y) = \sum_{i=0}^n y_i P(Y=y_i) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{3^{i-1}}{4^{i-1}} \cdot \frac{1}{4} = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{3^{i-1}}{4^i}$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$$

On prendra après $x = \frac{3}{4}$

$$\text{On pose } f: x \mapsto \sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\text{donc } f'(x) = \sum_{i=1}^n i x^{i-1} = \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$

Il n'y a pas de x dans cette expression: il faut évaluer cela en $x = \frac{3}{4}$

$$\text{donc } E(Y) = \frac{1}{4} x f'(x) = \frac{1}{4} \frac{x(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \frac{(n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}-1\right) - \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) \cdot \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}-1\right)^2}$$

$$= \frac{3}{12} - \frac{(n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 16}{4} - \frac{3^{n+2}}{4^{n+2}} = -\frac{(n+1)3^n}{4^n} - \frac{3^{n+2}}{4^n} = -\frac{3^n}{4^n} ((n+1) + 3^2)$$

Calculs à refaire.