Intégration et séries

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a,b])^2$. Alors

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Proposition 2 Inégalité de Minkowski

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a,b])^2$. Alors

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Proposition 3 Théorème de l'intégrale nulle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors $f = 0$.

Proposition 4 Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b])^2$.

On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Proposition 5 Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $(S_n(f))$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f$. On choisira ici une subdivision régulière, et donc $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$

Proposition 6 Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

Les deux propriétés sont à connaître, une seule sera à démontrer, au choix de l'interrogateur

- $I : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}\right.$ est une forme linéaire.
- Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a,b])$, alors

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Proposition 7 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est continue sur I alors $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F_a' = f$.

Proposition 8 Ensemble des primitives

Toute fonction continue sur un segment I admet une infinité de primitives qui diffèrent entre elles d'une constante.
De plus, $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Proposition 9 Théorème fondamental de l'intégration

i) Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$ où I est un segment de Soit G une primitive de f sur I alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a).$$

Proposition 10 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. Pour tout $b \in I$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 11 Conséquence : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\left|f^{(n+1)}\right| \leqslant M$ sur I, alors pour tout $b \in I$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proposition 12 Série géométrique

Soit $r \in \mathbb{C}$. La série $\sum r^n$, dite **série géométrique de raison** r, converge ssi $|r| < 1$.
On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

À savoir faire

- ☐ Calculer des intégrales : IPP, changement de variable
- ☐ Savoir appliquer les formules de Taylor avec reste intégrale et l'inégalité de Taylor Lagrange
- ☐ Savoir reconnaître des sommes de Riemann, ce qui permet de déterminer la limite d'une suite de la forme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$
- ☐ Utiliser l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la moyenne pour majorer une intégrale (application : pour montrer que $I_n = \int_a^b f_n(t)\,dt \to 0$ où f_n est une suite de fonctions par exemple)
- ☐ Justifier qu'une fonction est uniformément continue/ lipschitzienne.
- ☐ En deuxième exercice : tout sur les matrices d'applications linéaires

Ce qu'en dit le programme

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
d) Sommes de Riemann	
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pour f continue.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	

f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.