

ex 16. TD 22

$M_9 (i) \Rightarrow (ii)$

Si $\ker(u) = \text{Im}(u)$

alors $\forall x \in E, u(x) \in \text{Im}(u) = \ker(u)$

donc $u(u(x)) = 0_E$ i.e. $u^2(x) = 0_E$.

ainsi $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

et d'après le thm du rang,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) \\ &= 2 \dim(\text{Im}(u)) \\ &= 2 \text{rg}(u) \end{aligned}$$

$M_9 (ii) \Rightarrow (i)$

Si $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\forall x \in E, u(u(x)) = 0_E$

alors $u(x) \in \ker(u)$

Soit $y \in \text{Im}(u)$. Alors $\exists x \in E / y = u(x)$

Ainsi $u(y) = u^2(x) = 0_E$ (car $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$)

donc $y \in \ker(u)$, ce qui prouve

$$\boxed{\text{Im}(u) \subset \ker(u)}$$

D'après le thm du rang

$$\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$$

Hypothèse (ii)

$\nwarrow$
2 $\dim(\text{Im}(u))$

donc $\dim(\ker(u)) = \dim(\text{Im}(u))$

Or $\ker(u) \subset \text{Im}(u)$: on a donc

$$\boxed{\ker(u) = \text{Im}(u)}$$

ce qui prouve (i).