Ex 15. TD 23

Mq $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$.

Alors $\exists x \in E \,/\, y = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im}\, g} \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

Donc $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

dim dim

$$\boxed{rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g).}$$

De plus

$$rg(f) = rg(f+g+(-g)) \leq rg(f+g) + rg(-g)$$

or $rg(-g) = rg(g)$.

Donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$

Par symétrie (en intervertissant f et g) on a

$$rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$$

Donc $\max(rg(g) - rg(f), rg(f) - rg(g)) \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

i.e $\boxed{|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)}$