

TABLF
Johar
MPSI

Exercice 11 Soit deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y + z - t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0 \text{ ET } x + 3y + 2z + 2t = 0\}$$

① On a :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 3y + 2z + 2t = 0 \end{cases}\}$$

$$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - z = 0 \\ 3y + 3z + 2t = 0 \end{cases}\} \quad \checkmark$$

$$= \{(z, -z - \frac{2}{3}t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \quad \checkmark$$

$$= \{z \underbrace{(1, -1, 1, 0)}_{=: \vec{u}} + t \underbrace{(0, -\frac{2}{3}, 0, 1)}_{=: \vec{v}}, (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \quad \checkmark$$

$= \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de G , donc $\dim(G) = 2$ $\checkmark$

Oui,
mais
pourquoi?

Remarque : pour que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre, on résout $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Rightarrow$

$$\textcircled{2} \text{ On a } [(x, y, z, t) \in F \cap G]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 3y + 2z + 2t = 0 \\ 5x + y + z + t = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ 3y + 3z + 2t = 0 \\ y + 6z - t = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ 3y + 3z + 2t = 0 \\ 16z - 5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z - 2z = -3z \\ t = 3z \end{cases}$$

$$\text{d'où } F \cap G = \{(z, -3z, z, 3z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{z \underbrace{(1, -3, 1, 3)}_{=: \vec{w}}, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{w}) \text{ droite vectorielle} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} \text{ On a } \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \quad \checkmark$$

$$= 3 + 2 - 1 = 4, \text{ i.e. } F + G \text{ est un sev. de } \mathbb{R}^4 \text{ de}$$

$$\text{dimension } 4 \quad \checkmark \text{ donc } F + G = \mathbb{R}^4. \quad \checkmark$$