

Exercice 10

* On s'intéresse à la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

Voyons si cette famille est libre :

$$a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3 = \vec{0} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow (a+2b+3c; -2a+3b+8c; 5a+b-3c; -3a-4b-5c) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -2a+3b+8c=0 \\ 5a+b-3c=0 \\ -3a-4b-5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 7b+14c=0 \\ -3b-18c=0 \\ 2b+4c=0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$
 $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 7b+14c=0 \\ 0=0 \\ -9b-18c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ b+2c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3$
 $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c = c \\ b = -2c \end{cases}, \text{ d'où les couples solutions sont } (c, -2c, c), \text{ i.e. il existe d'autres solutions que } (0, 0, 0), \text{ donc cette famille n'est pas libre. } \checkmark$$

Comme $(1, -2, 1)$ est solution du pb. précédent on

Voyons si on peut exprimer l'un des vecteurs en fonction des deux autres :

$$\rightarrow \vec{x}_1 = a\vec{x}_2 + b\vec{x}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=1 \\ 3a+8b=-2 \\ a-3b=5 \\ -4a-5b=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=1 \\ -9b=9 \\ a-3b=5 \\ -4a-5b=-3 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} b=-1 \\ a=\frac{1}{2}(1-3b)=\frac{1}{2}(4)=2 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3$
 $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

d'où $\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$

→ le couple $(2, -1)$ fonctionne + il faut les autres équations :

$$\begin{cases} 2-3 \times (-1) = 5 \text{ ok} \\ -4 \times (2) - 5 \times (-1) = -3 \text{ ok} \end{cases}$$

Donc $\boxed{\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3}$, donc on peut réduire la famille à $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$, toujours génératrice (car $\text{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \text{vect}(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$) et libre car $\vec{x}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{x}_3$ (il n'y a pas de relation de proportionnalité).

→ donc c'est une base de $\mathcal{W}$, donc $\dim(\mathcal{W}) = 2$ ✓

Complétons cette base de $\mathcal{W}$ en une base de $\mathbb{R}^4$
(sachant que ce n'est pas encore une car $\dim(\mathcal{W}) = 2$).

→ théorème de la base incomplète : algorithme

On sait que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$,
avec $\vec{e}_i =$ vecteur de $\mathbb{R}^4$ dont toutes les coordonnées
sont nulles sauf à la i^{e} position.

On résout :

$$\vec{e}_1 = a\vec{x}_2 + b\vec{x}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 3a + 8b = 0 \\ a - 3b = 0 \\ -4a - 5b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 3b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3} \text{ et } a = \frac{1}{2}(1 - 3b) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

↳ les deux dernières équations sont-elles vérifiées ?

$a - 3b = 1 - 3 \times (-\frac{1}{3}) = 2 \neq 0$, donc $\vec{e}_1$ ne peut pas
s'exprimer comme une combi. linéaire de $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$: on
l'ajoute à notre famille.

$$\vec{e}_2 = a\vec{x}_2 + b\vec{x}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 3a + 8b = 1 \\ a - 3b = 0 \\ -4a - 5b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{2}{9} \text{ et } a = \frac{1}{2}(-3b) = -\frac{1}{2} \times \frac{3 \times 2}{9} = -\frac{1}{3}$$

↳ les deux dernières équations sont-elles
vérifiées ? $-\frac{1}{3} - 3 \times (\frac{2}{9}) = -\frac{3}{3} = -1 \neq 0$,
donc $\vec{e}_2$ ne peut pas s'exprimer comme une combi.
linéaire de $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$: on l'ajoute à notre famille.

→ On obtient la famille $(\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de
cardinal = 4 (= $\dim(\mathbb{R}^4)$), donc on s'arrête.

↳ On a trouvé notre base !

On veut
tester si :

$\vec{e}_2 \in \text{Vect}(\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{e}_1)$

donc il faudrait
y rajouter
+ $\vec{e}_1$.