

Exercice 19: Endomorphisme nilpotent

Soient E un K -ev de dimension n et f un endomorphisme nilpotent d'indice p sur E , c.à.d. $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Soit $\vec{v} \in E$, montrez que: $(\vec{v}, f(\vec{v}), \dots, f^{p-1}(\vec{v}))$ est libre dans E .

Soit $d_0, \dots, d_{p-1} \in K^p$, tel que:

$$(*) : d_0 \vec{v} + d_1 f(\vec{v}) + \dots + d_{p-1} f^{p-1}(\vec{v}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

En appliquant successivement par f , $p-1$ fois l'égalité $(*)$

on obtient que: $d_0 f^{p-1}(\vec{v}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, or $f^{p-1}(\vec{v}) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc $d_0 = 0$. ✓

On peut adopter ce raisonnement, en réinjectant $d_0 = 0$ à $(*)$ et composer par f $p-2$ fois dans l'égalité $(*)$ on obtient que:

de la même façon: $d_1 = 0$. ✓

Donc on en déduit que: $\hat{A}$ En composant par f $p-i$ fois avec $i \in \{1, p-1\}$, on a: $d_{i-1} = 0$. ✓

On alors, en réinjectant dans $(*)$ on a: $d_{p-1} f^{p-1}(\vec{v}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$
et comme: $f^{p-1}(\vec{v}) \neq 0$ donc $d_{p-1} = 0$.

Ainsi: $\forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$: $d_i = 0_{K}$. ✓

Donc la famille:

$(\vec{v}, f(\vec{v}), \dots, f^{p-1}(\vec{v}))$ est libre. ✓

déjà
(à corriger au TD
prochain)