

TD 22

Dimensions

TURMEL Olivia
 RAZAFIMANIRY Miarisoa
 MONCEAU Anaïs MPSI

Ex 10 Soit E , un K -ev, soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. $\ker(u) = \text{Im}(u)$

2. $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\dim(E) = 2 \text{rg}(u)$

[1 $\Rightarrow$ 2]: On suppose 1.

On sait que $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u))$

Or $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Im}(u))$

ie $\dim(E) = 2 \text{rg}(u)$ ✓

Soit $x \in E$ $u^2(x) = u(u(x))$, Or $u(x) \in \text{Im}(u) = \ker(u)$

donc $u(u(x)) = 0_E$ ✓

Cela étant vrai $\forall x \in E$ on a $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ✓

[2 $\Rightarrow$ 1] On suppose 2.

Soit $y \in \text{Im}(u)$, $\exists x \in E / y = u(x)$

On a $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$ ✓

donc $y \in \ker(u)$ donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ ✓

Thm du rang: $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u))$

avec la 2^e égalité on obtient $2 \text{rg}(u) = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u))$ ✓

donc $\dim(\ker(u)) = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ ✓

Donc $\text{Im}(u)$ est un s-ev de $\ker(u)$ et

$\dim(\ker(u)) = \dim(\text{Im}(u))$ donc $\ker(u) = \text{Im}(u)$ ✓

T.B.

Ex 15:

• Soit $y \in \text{Im}(f+g)$ alors $\exists u \in E$, $y = (f+g)(u) = \underbrace{f(u)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{g(u)}_{\in \text{Im}(g)}$ ✓

donc $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ ✓

ce qui prouve que $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ ✓

donc $\dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$ ✓

ie $\dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$

$\leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$

d'où

$\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ ✓

comme $\text{rg}(f+g-g) \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) \checkmark$

d'où $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg}(g) \checkmark$ car $\text{rg}(g) = \text{rg}(-g) \checkmark$

ie $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f+g) \checkmark$

Par symétrie du raisonnement on a ^{aussi} $\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f+g) \checkmark$

d'où $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \checkmark$

Exercice 5:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x \mapsto a \text{sh}(x) + b \text{ch}(x) + c e^x \end{array} \right.$$

Bien: mais en remarquant que $E = \text{vect}(\text{sh}; \text{ch}; \exp)$ on obtient que E est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) Considérons $f = \tilde{0}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. En choisissant $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ et on a bien $f \in E$.

c) Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= a \text{sh}(x) + b \text{ch}(x) + c e^x \\ g(x) &= a' \text{sh}(x) + b' \text{ch}(x) + c' e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } (\lambda f + g)(x) &= \lambda f(x) + g(x) \\ &= \lambda (a \text{sh}(x) + b \text{ch}(x) + c e^x) + (a' \text{sh}(x) + b' \text{ch}(x) + c' e^x) \\ &= \text{sh}(x) \underbrace{(\lambda a + a')}_{a'' \in \mathbb{R}} + \text{ch}(x) \underbrace{(\lambda b + b')}_{b'' \in \mathbb{R}} + \underbrace{(\lambda c + c')}_{c'' \in \mathbb{R}} e^x \\ &= a'' \text{sh}(x) + b'' \text{ch}(x) + c'' e^x \in E. \end{aligned}$$

Conclusion: E est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. On a $E = \text{vect}(\text{sh}, \text{ch}, \exp)$ évitez e : $e \in \mathbb{R}$
Donc $(\text{sh}, \text{ch}, \exp)$ est une famille génératrice de E .
On en a: $\exp \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Donc } a \text{sh}(x) = \frac{ae^x}{2} - \frac{ae^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b \text{ch}(x) = \frac{be^x}{2} + \frac{be^{-x}}{2}$$

$$a \text{sh}(x) + b \text{ch}(x) + c e^x = e^x \underbrace{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c \right)}_{\in \mathbb{R}} + e^{-x} \underbrace{\left(\frac{-a}{2} + \frac{b}{2} \right)}_{\in \mathbb{R}}$$

Donc $E = \text{vect}(e^x, e^{-x})$

(e^x, e^{-x}) est une base de E $\checkmark$.

$\downarrow$ Plus vite $\text{vect}(x \mapsto e^x; x \mapsto e^{-x})$