

DS n°9.**Durée : 4 heures - Durée minimale obligatoire : 3 heures et 50 minutes****La calculatrice est interdite.****3 exercices indépendants**

1. Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, lorsqu'elles le sont, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$.
3. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.
- (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
 - (b) En déduire la loi de Y .
 - (c) X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (d) Calculer l'espérance de Y .

Problème I : Algèbre linéaire**I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice**

1. Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer $f(X^2 - 3)$
 - (b) Déterminer une base du noyau de f . (*Pensez bien aux cas particuliers !*)
 - (c) Déterminer une base de l'image de f .
2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer $g(X^3 - 2X^2 + X)$
- (b) Montrer qu'il existe une unique valeur de w pour laquelle g n'est pas injective. On notera w_0 cette valeur dans la suite.

- (c) Déterminer lorsque $w = w_0$ une base du noyau de g .

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$$

A. Etude de cas particuliers

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que : $Q = X^2 + uX + v$.
 - (a) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Déterminer le noyau de φ en fonction de u et v .
3. Soit w un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que : $Q = X^2 + 2X + w$.
 - (a) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (b) Déterminer suivant les valeurs de w le noyau de φ .

B. Etude du cas général

1. On suppose que Q n'admet pas de racine double.
 - (a) Que peut-on dire du pgcd de Q et de Q' ?
 - (b) Dédurre de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P .
 - (c) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ , il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tel que $P = QR^k$ et tels que Q ne divise pas R .
 - (d) Dédurre de la question précédente que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.
 - (e) Déterminer suivant les valeurs de n le noyau de φ .
2. On suppose que Q possède une racine double α .
 - (a) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P .
 - (b) Déterminer le noyau de φ .
(On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine α).
3. Dans cette question, on suppose n **impair**.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :

$$P = (X^2 + 1)R' - nXR$$

Justifier que l'application $\psi : P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire.

Problème II : probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dispose de $n + 1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j + 1$ boules numérotées de 0 à j . On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule j (pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k -ième tirage et on note j le numéro de la boule tirée. Le $(k + 1)$ -ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k -ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, P) . Pour tout entier naturel k , on considère la matrice W_k de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k , on note $E(X_k)$ et $V(X_k)$ respectivement, l'espérance et la variance de X_k .

1. (a) Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$, où $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
On citera bien les résultats du cours qui sont utilisés AINSI que leurs hypothèses
 (b) En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$.
2. (a) Déterminer la matrice ligne $B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.
 (b) Calculer le produit BA en fonction de B .
 (c) En déduire que la suite $(E(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
 (d) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n .
3. (a) Déterminer la matrice ligne C de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(X_k^2)$.
 (b) Calculer le produit CA en fonction de B et C .
 (c) Rappeler (sans démonstration) la formule permettant d'exprimer $\sum_{k=0}^n k^2$ en fonction de n .
 (d) Pour tout entier naturel k , exprimer $E(X_{k+1}^2)$ en fonction de $E(X_k^2)$ et $E(X_k)$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}$.
 (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 (b) En déduire l'expression de $E(X_k^2)$ en fonction de k et n .
 (c) Exprimer $V(X_k)$ en fonction de k et n .
5. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on pose, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $e_j = X^j$. On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On confondra ici polynômes et fonctions polynomiales.

Soit f l'application qui à un polynôme $S \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $Q = f(S)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = f(S)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \int_1^x S(t) dt & \text{si } x \neq 1 \\ S(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- (c) Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .

6. Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $Q_j = (X - 1)^j$.

- (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est libre (on devra pour cela repasser par la définition de "famille libre" et ne pas utiliser un résultat du type "en tant que famille de polynômes échelonnée en degré...")
- (b) En déduire que $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- (d) En utilisant la formule de Taylor, décomposer le monôme X^k dans la base $\mathcal{B}'$.
- (e) En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
- (f) Justifier qu'on a bien $D = P^{-1}AP$ et déterminer la matrice P^{-1} .

7. Pour tout entier k , on définit $Z_k = P^{-1}W_k$

- (a) Établir une relation de récurrence entre Z_{k+1} et Z_k
- (b) En déduire l'expression de Z_k puis de W_k en fonction de D et P (pour tout entier $k \in \mathbb{N}$)
- (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de X_k est donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j+i+1)^k}$$

- (d) Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = j)$. Interpréter l'issue asymptotique des tirages.