

DM n°7.**Exercice 1**

Soient $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires dont les univers images sont $\{0; 1\}$ telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/6 + p$	$1/3 - p$
1	$1/2 - p$	p

1. Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer les espérances et les variances de X et Y .
3. Calculer la covariance du couple (X, Y) .
4. Pour quelles valeurs de p les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par les joueurs sur une partie.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Problème

1. Une famille de polynômes

On considère la suite de polynômes $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$E_0 = 1, E_1 = X \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, E_k = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}$$

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines réelles de E_k en précisant leurs multiplicités.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la famille $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n , et $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ ses coordonnées dans la base $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_i$.

En déduire par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P(i)$.

On pourra traiter à part le cas où $k = 0$.

- (d) Ici $n = 3$. Calculer les coordonnées des polynômes $1, X, X^2$ et X^3 dans la base $(E_k)_{0 \leq k \leq 3}$.

2. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P^δ le polynôme défini par :

$$P^\delta = P(X+1) - P(X)$$

On note $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; P \mapsto P^\delta$.

- (a) Montrer que Δ est linéaire.
- (b) Calculer E_0^δ . Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k^δ en fonction de E_{k-1} .
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .
On note $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application induite. Déterminer son image et son noyau.
- (d) En déduire que Δ est une application surjective, et préciser son noyau.

3. Polynômes entiers, polynômes à coordonnées entières

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On dit que P est un polynôme entier si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

On fixe $N \geq \deg(P)$, et on note $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq N}$ les coordonnées de P dans la base $(E_k)_{0 \leq k \leq N}$ de $\mathbb{R}_N[X]$. On dit que P est un polynôme à coordonnées entières si les réels $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq N}$ sont des entiers relatifs.

L'objectif de cette partie est de montrer que le polynôme P est entier si, et seulement si, il est à coordonnées entières. Pour cela, on sera amené à utiliser les résultats des parties précédentes.

- (a) Montrer que P est un polynôme entier si, et seulement si, $P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est un polynôme entier.
- (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme E_k est entier.
- (c) Montrer que, si P est à coordonnées entières, alors P est un polynôme entier.
- (d) Montrer que P est un polynôme à coordonnées entières si, et seulement si, $P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est à coordonnées entières.
- (e) En déduire que, si P est un polynôme entier, alors P est à coordonnées entières.