

Correction du DS n°9.

Problème I : Algèbre linéaire

I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. (a) $f(X^2 - 3) = f(X^2) - 3f(1) = uX^2 + 2vX - 3(-u - 2X) = uX^2 + (2v + 6)X + 3u$

(b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -uc + vb = 0 \\ -2c + 2va = 0 \\ -b + ua = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 2va = 0 \\ -uc + vb = 0 \\ -b + ua = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 2va = 0 \\ 2vb - 2uva = 0 \\ -b + ua = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 2va = 0 \\ -b + ua = 0 \\ 2vb - 2uva = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 2va = 0 \\ -b + ua = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = va \\ b = ua \end{cases} \text{ Ainsi } \ker(f) = \{aX^2 + uaX + va, a \in \mathbb{R}\}$$

donc $\ker(f) = \text{vect}(X^2 + uX + v)$

(c) D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker(f) = 2$. De plus, $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(1), f(X), f(X^2))$.

Or $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(1) = -u - 2X$.

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(X) = v - X^2$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ u \end{pmatrix}$ donc $f(X^2) = 2vX + uX^2$.

De plus, $vf(1) + uf(X) = -f(X^2)$ donc $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(1), f(X))$. Comme $\text{rg}(f) = 2$, on en déduit que

$(2X + u, X^2 - v)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

2. (a) $g(X^3 - 2X^2 + X) = 3X^3 + 3X^2 - 2(-X^3 + X^2 + 2wX) + (-X^2 - X + w) = 5X^3 - X^2 + (-4w - 1)X + w$

(b) g est injective ssi elle est bijective (car c'est un endomorphisme) donc ssi elle est de rang égal à 4, donc ssi le rang de B vaut 4.

Or

$$B = \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 - (1+w)L_2} \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & 3w-1 & -3(1+w) \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3w-1 & -3(1+w) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (3w-1)L_3} \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6(w-1) \end{vmatrix}$$

Donc la seule valeur pour laquelle g n'est pas injective est 1.

$$\begin{aligned}
\text{(c) Soit } P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \ker(g) &\iff g(P) = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3a_0 + a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff P = \frac{a_2}{3} (1 + 3X + 3X^2 + X^3) \text{ donc } \boxed{\ker(g) = \text{vect}(1 + 3X + 3X^2 + X^3)}.
\end{aligned}$$

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

A. Etude de cas particuliers

- $\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
 $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = 2(\lambda P_1 + P_2)'Q - n(\lambda P_1 + P_2)Q' = \lambda(2P_1'Q - nP_1Q') + (2P_2'Q - nP_2Q') = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$
 De plus, Si $P = a_nX^n + R_n$ et $Q = b_2X^2 + S_2$ avec $\deg(R_n) < n$ et $\deg(S_2) < 2$,
 alors $\varphi(P) = 2(na_nX^{n-1} + R_n')(b_2X^2 + S_2) - n(a_nX^n + R_n)(2b_2X + S_2') = (2na_nb_2 - na_n2b_2)X^{n+1} + T_n = T_n$ et $\deg(T_n) < n + 1$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
 Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}.$

- $\varphi(1) = -2u(2X + u) = -4X - 2u$
 $\varphi(X) = 2(X^2 + uX + v) - 2X(2X + u) = 2v - 2X^2$
 $\varphi(X^2) = 2(2X)(X^2 + uX + v) - 2X^2(2X + u) = 4vX + 2uX^2$
 Donc $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} -2u & 2v & 0 \\ -4 & 0 & 4v \\ 0 & -2 & 2u \end{pmatrix}$

- On remarque que $M_B(\varphi) = 2M_B(f) = 2A$ donc $\boxed{\ker(\varphi) = \ker(f) = \text{vect}(Q)}.$

- $\varphi(1) = -3(2X + 2) = -6X - 6$
 $\varphi(X) = 2(X^2 + 2X + w) - 3X(2X + 2) = -4X^2 - 2X + 2w$
 $\varphi(X^2) = 2(2X)(X^2 + 2X + w) - 3X^2(2X + 2) = -2X^3 + 2X^2 + 4wX$
 $\varphi(X^3) = 2(3X^2)(X^2 + 2X + w) - 3X^3(2X + 2) = 6X^3 + 6wX^2$
 Donc $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} -6 & 2w & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 4w & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 6w \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

- On remarque que $M_B(\varphi) = 2M_B(g) = 2A$ donc $\ker(\varphi) = \ker(g).$

Donc $\boxed{\text{si } w = 1 \text{ alors } \ker(\varphi) = \text{vect}(1 + 3X + 3X^2 + X^3) \text{ et si } w \neq 1 \text{ alors } \ker(\varphi) = \{0\}}.$

B. Etude du cas général

1. (a) Comme $\deg(Q') = 1$ et $Q \wedge Q' \mid Q'$, on en déduit que $\deg(Q \wedge Q') \leq 1$.
Si $\deg(Q \wedge Q') = 1$ alors Q et Q' sont associés d'où $Q' \mid Q$ ce qui est exclu.
Donc $\deg(Q \wedge Q') < 1$ soit $\boxed{Q \wedge Q' = 1}$.
 - (b) Si $P \in \ker(\varphi)$ alors $2P'Q = nPQ'$ donc $Q \mid PQ'$. Or $Q \wedge Q' = 1$, d'après le théorème de Gauss, $\boxed{Q \text{ divise } P}$.
 - (c) donc il existe un entier k non nul tel que Q^k divise P et Q^{k+1} ne divise pas P soit il existe un polynôme R tel que $P = RQ^k$ avec Q ne divise pas R . (Remarque : il y avait une faute de frappe dans l'énoncé, il fallait montrer que $P = RQ^k$ et non $P = R^kQ$)
 - (d) Comme $2P'Q = nPQ'$, $2kQ'Q^kR + 2Q^{k+1}R' = nQ^kRQ'$ soit $\boxed{(2k-n)Q'R + 2QR' = 0}$ car $Q \neq 0$.
Soient α et β les deux racines distinctes de Q , on a donc $Q'(\alpha) \neq 0$ et $Q'(\beta) \neq 0$.
Comme Q ne divise pas R , $R(\alpha) \neq 0$ ou $R(\beta) \neq 0$. On en déduit donc en évaluant l'égalité précédente en α et β que $\boxed{n = 2k}$.
 - (e) Si n est impair, $\boxed{\ker(\varphi) = \{0\}}$ (par contraposition de la propriété précédente).
Si n est pair, $n = 2k$ et $2QR' = 0$ soit $R' = 0$ donc R est constant et $\boxed{\ker(\varphi) = \text{vect}(Q^k)}$.
2. (a) $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$ donc $X - \alpha \mid Q'$ et $(X - \alpha)^2 \mid Q$.
Comme $2P'Q = nPQ'$, $(X - \alpha)^2 \mid nPQ'$ donc $X - \alpha \mid P$ soit $\boxed{\alpha \text{ est une racine de } P}$.
 - (b) Si α est racine d'ordre m de P , on a $P = (X - \alpha)^m R$ avec $R(\alpha) \neq 0$ alors
 $P \in \ker(\varphi) \iff 2m(X - \alpha)^{m+1}R + 2(X - \alpha)^{m+2}R' = 2n(X - \alpha)^{m+1}R \iff 2(m-n)R + 2(X - \alpha)R' = 0$
On évalue en α , $2(m-n)R(\alpha) = 0$ donc $m = n$. On en déduit donc que R est constant.
 $\boxed{\ker(\varphi) = \text{vect}((X - \alpha)^n)}$.
3. On pose $Q = \frac{1}{2}(X^2 + 1)$.
 $\varphi(R) = 2R' \frac{1}{2}(X^2 + 1) - nR \frac{1}{2} 2X = (X^2 + 1)R' - nXR$ donc $\varphi(R) = P$.
Comme n est impair, $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \varphi(R) = (X^2 + 1)R' - nXR$.
L'application $\psi : P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire puisque $\boxed{\psi = \varphi^{-1}}$.