

DM n°7.

Exercice 1

Soient $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires dont les univers images sont $\{0; 1\}$ telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/6 + p$	$1/3 - p$
1	$1/2 - p$	p

1. Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple? Quel que soit $p \in \mathbb{R}$ on a $\frac{1}{6} + p +$

$$\frac{1}{3} - p + \frac{1}{2} - p + p = 1. \text{ Ce tableau représente donc la loi d'un couple ssi } \begin{cases} \frac{1}{6} + p \geq 0 \\ \frac{1}{3} - p \geq 0 \\ \frac{1}{2} - p \geq 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \text{ donc ssi } p \in [0, \frac{1}{3}]$$

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer les espérances et les variances de X et Y .

On a $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Donc $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. On a aussi $P(Y = 0) = \frac{2}{3}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ donc $E(Y) = \frac{1}{3}$ et $E(Y^2) = \frac{1}{3}$ donc $V(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

3. Calculer la covariance du couple (X, Y) .

On a $XY(\Omega = \{0; 1\})$ et $P(XY = 1) = p$ donc $E(XY) = p$. D'où : $\text{Cov}(X, Y) = p - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = p - \frac{1}{6}$

4. Pour quelles valeurs de p les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Par conséquent, comme $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$, il est nécessaire d'avoir $p = \frac{1}{6}$ pour avoir $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Réciproquement, pour $p = \frac{1}{6}$ on a la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/3$	$1/6$
1	$1/3$	$1/6$

Les deux lignes étant proportionnelles (même égales) on en déduit que pour $p = 1/6$ on a bien $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Conclusion $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$

Exercice 1

Soient $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires dont les univers images sont $\{0; 1\}$ telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/6 + p$	$1/3 - p$
1	$1/2 - p$	p

1. Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer les espérances et les variances de X et Y .
3. Calculer la covariance du couple (X, Y) .
4. Pour quelles valeurs de p les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par les joueurs sur une partie.

- (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

On a $X(\Omega) = \llbracket 0; 5 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ choisir une manière de tirer k boules blanches revient :

- Choisir k entiers dans $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ qui correspondront aux instants auxquels des boules blanches sont tirées
- Pour chacun des k choisis : choisir une boule blanche, cela fait 2^k possibilités. Et pour chacun des autres entiers $(5 - k)$ choisir une boule noire : cela fait 8^{5-k} possibilités.

Il y a donc $\binom{5}{k} 2^k 8^{5-k}$ tirages conduisant à l'obtention de k boules blanches. Au total, il y a 10^5 tirages, qui ont tous la même probabilité d'apparaître, donc

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \frac{2^k 8^{5-k}}{10^5} = \binom{5}{k} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$$

On peut considérer que $X = X_1 + \dots + X_5$ où $X_i = \begin{cases} 0 & \text{si la } i\text{-ème boule tirée est noire} \\ 1 & \text{si la } i\text{-ème boule tirée est blanche} \end{cases}$ Les v.a. $(X_i)_{i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket}$

ont la même loi et sont mutuellement indépendantes. Elles sont toutes d'espérance $\frac{1}{5}$ et de variance $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}^2 = \frac{4}{25}$

On a $E(X) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et par indépendance, on a $V(\sum_{i=1}^5 X_i) = \sum_{i=1}^5 V(X_i) = 5 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$.

- (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

On a $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ et $V(Y) = V(5X - 15) = 5^2 V(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$

Pour la loi, on a $Y(\Omega) = 5 \llbracket 0; 5 \rrbracket - 15 = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10\}$ et l'on a $P(Y = -15) = P(X = 0)$ puis $P(Y = -10) = P(X = 1)$ et $P(Y = -5) = P(X = 2) \dots P(Y = 10) = P(X = 5)$

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

- (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance. Cette fois-ci, il est impossible de tirer plus que deux boules blanches, car il n'y en a que 2 en tout. Donc $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. On peut décider de ne regarder que l'ensemble des 5 boules obtenues après tirages : chacun des ensembles à 5 éléments ont la même probabilité et il en existe $\binom{5}{10}$.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9}.$$

Pour choisir obtenir une boule blanche et 4 noires, il y a $\binom{2}{1} \binom{8}{4}$ ensemble qui conviennent, ce qui donne $P(X = 1) = \frac{2 \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{5}{9}$ enfin $P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9}$ On a donc $E(X) = \frac{5}{9+2 \cdot \frac{2}{9}=1}$ et

$$E(X^2) = \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{9} \text{ donc } V(X) = \frac{13}{9} - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

- (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

On a $P(Y = -15) = \frac{2}{9}$ et $P(Y = -10) = \frac{5}{9}$ et $P(Y = -5) = \frac{2}{9}$ $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ et $V(Y) = 25V(X) = \frac{100}{9}$

Problème 1

1. Une famille de polynômes

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, E_k est de degré k et $0, 1, \dots, k-1$ sont racines de E_k . On a donc l'intégralité des racines de E_k ce qui induit qu'elles sont toutes simples.

(b) $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i E_i = 0 \quad (*)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $\mathcal{P}(k) : \ll \lambda_k = 0 \gg$.

• Au rang 0 : 0 est racine de tous les polynômes $E_1 \dots E_n$ donc en évaluant la relation $(*)$ en 0 on obtient $\lambda_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(0) \dots \mathcal{P}(k)$ vraies.

On a alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$ et $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i E_i = 0$. Or $k+1$ est racine de tous les polynômes $E_{k+2} \dots E_n$ donc en évaluant la relation $(*)$ en $k+1$ on obtient $\lambda_{k+1} = 0$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

$(E_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = \sum_{i=0}^n \lambda_i E_i(k) = \sum_{i=0}^k \lambda_i E_i(k)$ car k est racine de E_i pour $k+1 \leq i \leq n$.

$$\text{d'où } P(k) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1)}{i!} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \frac{k!}{(k-i)! i!} \text{ soit } \boxed{P(k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_i}.$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P(i)$.

• Au rang 0 : $\sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} (-1)^{0-i} P(i) = P(0) = \lambda_0$ donc la formule est vraie au rang 0.

• Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons que $\lambda_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P(i)$.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \lambda_i \text{ d'où } \lambda_{k+1} = P(k+1) - \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \lambda_i \\ &= P(k+1) - \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} P(j) \right] \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= P(k+1) - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \left[\binom{k+1}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} P(j) \right] \\ &= P(k+1) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=j}^k \left[\binom{k+1}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+1-j} P(j) \right] \text{ car } \begin{cases} 0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq i \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq j \leq k \\ j \leq i \leq k \end{cases} \\ &= P(k+1) + \sum_{j=0}^k \left[\sum_{i=j}^k \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+1-j} \right] P(j) \end{aligned}$$

Montrons que $\sum_{i=j}^k \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+1-j} = \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j}$.

$$\text{On a } \frac{\binom{k+1}{i} \binom{i}{j}}{\binom{k+1}{j}} = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} \frac{i!}{(i-j)!j!} \frac{j!(k+1-j)!}{(k+1)!} = \frac{(k+1-j)!}{(k+1-i)!(i-j)!} = \binom{k+1-j}{i-j}$$

$$\text{d'où } \sum_{i=j}^k \binom{k+1}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+1-j} = \sum_{i=j}^k \binom{k+1}{j} \binom{k+1-j}{i-j} (-1)^{i+1-j} = \binom{k+1}{j} \sum_{i=j}^k \binom{k+1-j}{i-j} (-1)^{i+1-j}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+1}{j} \sum_{\ell=0}^{k-j} \binom{k+1-j}{\ell} (-1)^{\ell+1} = -\binom{k+1}{j} \left[\sum_{\ell=0}^{k+1-j} \binom{k+1-j}{\ell} (-1)^{\ell} - \binom{k+1-j}{k+1-j} (-1)^{k+1-j} \right] \\
&= -\binom{k+1}{j} \left[(-1+1)^{k+1-j} - (-1)^{k+1-j} \right] = \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient en reportant :

$$\lambda_{k+1} = P(k+1) + \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} P(j) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} P(j).$$

Donc la formule est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P(i)$

Remarque : Cette formule s'appelle Formule d'inversion de Pascal

(d) $\boxed{1 = E_0 \text{ et } X = E_1}$.

$$\lambda_0 = X^2(0) = 0, \lambda_1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^{1-i} X^2(i) = -0 + 1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (-1)^{2-i} X^2(i) = 0 - 2 + 4 = 2 \text{ donc}$$

$$\boxed{X^2 = E_1 + 2E_2}.$$

$$\lambda_0 = X^3(0) = 0, \lambda_1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^{1-i} X^3(i) = -0 + 1 = 1, \lambda_2 = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (-1)^{2-i} X^3(i) = 0 - 2 + 8 = 6 \text{ et}$$

$$\lambda_3 = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (-1)^{3-i} X^3(i) = -0 + 3 - 3 \times 8 + 27 = 6 \text{ donc } \boxed{X^3 = E_1 + 6E_2 + 6E_3}.$$

2. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

(a) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X))$$

$$= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q) \text{ donc } \boxed{\Delta \text{ est linéaire}}.$$

(b) $E_0^\delta = E_0(X+1) - E_0(X) = 0.$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, E_k^\delta = E_k(X+1) - E_k(X) = \frac{(X+1)X(X-1) \cdots (X-k+2)}{k!} - \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{X(X-1) \cdots (X-k+2)}{k!} (X+1 - (X-k+1)) = \frac{X(X-1) \cdots (X-(k-1)+1)}{(k-1)!}$$

$$\text{donc } \boxed{E_k^\delta = E_{k-1}}.$$

(c) $\bullet \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(\Delta(P)) = \deg(P(X+1) - P(X)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X))) \leq n$
donc $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \Delta}.$

$$\bullet \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, P = \sum_{k=0}^n \lambda_k E_k \text{ d'où } \Delta_n(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \Delta_n(E_k) = \lambda_0 \Delta_n(E_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k-1}$$

$$\text{Donc } \Delta_n(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} E_k \text{ soit } \boxed{\text{Im}(\Delta_n) = \text{vect}(E_0, \dots, E_{n-1})}$$

$$\bullet P \in \ker(\Delta_n) \iff \Delta_n(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} E_k = 0$$

$$\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \text{car } (E_0, \dots, E_n) \text{ est une famille libre.}$$

$$\iff P = \lambda_0 E_0 \quad \text{donc } \boxed{\ker(\Delta_n) = \text{vect}(1)}.$$

(d) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $n = \deg(P)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \Delta_n(Q) = \Delta(Q)$ donc $\boxed{\Delta \text{ est surjective de } \mathbb{R}[X]}$

$$\text{Notons } n = \deg(P), P \in \ker(\Delta) \iff P \in \ker(\Delta_n) \text{ donc } \boxed{\ker(\Delta) = \text{vect}(1)}.$$

3. Polynômes entiers, polynômes à coordonnées entières

- (a) P est un polynôme entier ssi $P(0) \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \in \mathbb{Z}$.

Or $P^\delta(n) = P(n+1) - P(n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \in \mathbb{Z} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) - P(n) \in \mathbb{Z}$.

Donc P est un polynôme entier ssi $P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est un polynôme entier.

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, E_k est entier ssi $E_k(0) \in \mathbb{Z}$ et E_k^δ entier.

Montrons le résultat demandé par récurrence.

• On a E_0 entier car $E_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons E_k entier.

$E_{k+1}(0) = 0$ donc $E_{k+1}(0) \in \mathbb{Z}$. De plus $E_{k+1}^\delta = E_k$ est entier d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que E_{k+1} est entier.

• Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme E_k est entier.

- (c) Supposons que P soit à coordonnées entières.

Si $P = \sum_{i=0}^N \lambda_i E_i$ alors $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lambda_i \in \mathbb{Z} \implies \forall k \in \mathbb{N}, P(k) = \sum_{i=0}^N \binom{k}{i} \lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Si $k \in \mathbb{Z}^-$, $P(k) = \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1)}{i!} = \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{(-1)^i (-k)(-k+1) \cdots (-k+i-1)}{i!}$

$= \sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{(-1)^i (-k+i)!}{(-k)! i!}$ donc $P(k) = \sum_{i=0}^n \lambda_i (-1)^i \binom{-k+i}{i} \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : Si P est à coordonnées entières, alors P est un polynôme entier.

- (d) Si $P = \sum_{i=0}^N \lambda_i E_i$ alors $P^\delta = \Delta(P) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1} E_i$.

On en déduit donc que P est un polynôme à coordonnées entières ssi $\lambda_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est un polynôme entier.

- (e) Si P est entier alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $P(i) \in \mathbb{Z}$ alors $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lambda_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P(i) \in \mathbb{Z}$.

donc si P est un polynôme entier, alors P est à coordonnées entières.