

II 1.a) On applique b) F.P.T avec le s.c.c

$(X_k = 0, \dots, X_k = n)$. On a :

$$P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=0}^n P(X_k = i) \times \underbrace{P_{X_k=i}(X_{k+1} = j)}_{\substack{= 0 \text{ si } j > i \text{ (car pas de} \\ \text{boule } j \text{ dans} \\ \text{l'urne } i)} \\ = \frac{1}{i+1} \text{ si } j \leq i \text{ (car } i+1 \\ \text{boules dans} \\ \text{cette urne, dont} \\ \text{la boule } j)$$

Ainsi $P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=j}^n \frac{P(X_k = i)}{i+1}$.

(b) La j^{e} coordonnée de W_{k+1} vaut alors

$$(W_{k+1})_j = \sum_{i=0}^j (W_k)_{i+1} \times \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{j+1} a_{j,i} (W_k)_{i-1}$$

donc $W_{k+1} = A W_k$.

2.a En choisissant $B = (0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n)$

on a bien $B W_k = \sum_{j=0}^n j P(X_k = j) = E(X_k)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (BA)_j &= \sum_{i=1}^j b_i a_{ij} = \sum_{i=1}^j (i-1) \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \\ &= \frac{(j-1) \times j}{2j} = \frac{j-1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $BA = \frac{1}{2} B$.

$$c) \quad 0_n \rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{k+1}) = B V_{k+1} = B A V_k = \frac{1}{2} B V_k = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_k)}$$

Ainsi $(\mathbb{E}(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$,

$$d) \text{ or } \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(n) = n$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N} \quad \boxed{\mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{2^k}}$$

$$3.a) \text{ Avec } C = (0 \ 1 \ 4 \ 9 \ \dots \ n^2) \text{ on a aussi}$$

$$C W_k = \sum_{j=0}^n j^2 P(X_k=j) = \mathbb{E}(X_k^2).$$

$$\begin{aligned} 3.b) \quad \forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad (CA)_j &= \sum_{i=1}^{n+1} C_i a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^j (i-1)^2 \times \frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{j} \times \sum_{i=0}^{j-1} i^2 \\ &= \frac{1}{j} \times \frac{(j-1) \times j \times (j-1)}{6} \\ &= \frac{(j-1) \times (2(j-1) + 1)}{6} \\ &= \frac{(j-1)^2}{3} + \frac{(j-1)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{CA = \frac{1}{3} C + \frac{1}{6} B}$$

$$3.c) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} d) \mathbb{E}(X_{k+1}^2) &= C W_{k+1} = C A W_k \\ &= \left(\frac{1}{3} C + \frac{1}{6} B \right) W_k \\ &= \frac{1}{3} C W_k + \frac{1}{6} B W_k \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_k^2) + \frac{1}{6} \mathbb{E}(X_k) \end{aligned}$$

$$4) O_n, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_k^2) + \frac{1}{6} \mathbb{E}(X_k) - \frac{n}{2^{k+2}} \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_k^2) + \frac{n}{6 \times 2^k} - \frac{n}{2 \times 2^k} \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_k^2) + \frac{n}{2^k} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_k^2) + \frac{n}{2^k} \left(\underbrace{-\frac{2}{6}}_{=-\frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \mu_k$$

$$b) O_n, \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mu_k = \frac{\mu_0}{3^k}$$

$$O, \mu_0 = \mathbb{E}(n^2) - n = n^2 - n$$

$$\text{Donc } \mu_k = \frac{n^2 - n}{3^k}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{n^2 - n}{3^k} + \frac{n}{2^k}}$$

$$c) \quad V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 \\ = \frac{n^2 - n}{3k} + \frac{n}{2k} - \frac{n^2}{4k}.$$

5) a) Soit S et T deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$
 alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$f(\lambda S + T)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x (\lambda S + T)(t) dt \\ = \frac{1}{x-1} \left(\lambda \int_1^x S(t) dt + \int_1^x T(t) dt \right) \\ = \lambda f(S)(x) + f(T)(x)$$

$$\text{et } f(\lambda S + T)(1) = \lambda S(1) + T(1) = \lambda f(S)(1) + f(T)(1)$$

$$\text{donc } \boxed{f(\lambda S + T) = \lambda f(S) + f(T)}$$

De plus, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$f(x^k) = \frac{1}{x-1} \times \int_1^x t^k dt \\ = \frac{1}{x-1} \times \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^x = \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{k+1} (x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1) \in \mathbb{R}_n[x].$$

donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$b) \text{ Comme } \forall k, f(x^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i \text{ on a}$$

$$Mat_B(f) = A.$$

c) Comme $\text{Mat}(f)$ est triangulaire supérieure à coeff. diagonaux non-nuls, elle est inversible,

Ainsi $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

6.a) Supposons q'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \text{et} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

En notant k le plus grand entier pour lequel $\lambda_k \neq 0$
 on a alors

$$\underbrace{\lambda_k Q_k}_{\substack{\text{de degré } k}} = \underbrace{-\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i Q_i}_{\in \mathbb{R}_{k-1}[X]} \quad \text{ce qui est absurde.}$$

6.b) Comme $(Q_0, \dots, Q_n)$ est libre et formée de $n+1$ polynômes, et que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6.c) $\forall k \in [0, n]$ on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} f(Q_k)(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x (t-1)^k dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{(t-1)^{k+1}}{k+1} \right]_1^x \\ &= \frac{(x-1)^{k+1} - 0}{k+1(x-1)} = \frac{Q_k(x)}{k+1} \end{aligned}$$

donc $f(Q_k) = \frac{1}{k+1} Q_k$

Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1/n \end{pmatrix}$

Comme $(X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$ 2

$$P = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} - \binom{1}{0} \binom{1}{0} & \binom{1}{0} \\ \binom{1}{1} - \binom{2}{1} & \vdots \\ \binom{2}{2} & \vdots \\ (0) & \ddots & -\binom{n}{n-1} \\ & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

On a $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, $p_{ij} = \binom{j-1}{i-1} (-1)^{i-1}$

▮ Formule de Taylor: $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P^{(i)}(1)}{i!} (X-1)^i$$

Par le monôme X^k , comme on a $(X^k)^{(i)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-i+1) X^{k-i} & \text{si } k \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on obtient
$$X^k = \sum_{i=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i!} (X-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q_i$$

Donc P_B^B est la matrice de coefficient général

$$\left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$$

f) D'après la formule de changement de base on

$$\underbrace{\text{Mat}_{B'}(f)}_{\text{"D"}} = \text{Mat}_{B', B'}(\text{id}) \times \text{Mat}_B(f) \times \text{Mat}_{B, B'}(\text{id})$$

$$= P^{-1} \times A \times P.$$

P^{-1} est la matrice de passage de B' à B déterminée par la Q.O.E.

$$\begin{aligned} \text{7) a) } 0_n &\Rightarrow \overline{Z_{k+1}} = P^{-1} W_{k+1} \\ &= P^{-1} A W_k \\ &= \underbrace{P^{-1} A P}_{= D} P^{-1} W_k \\ &= D Z_k \end{aligned}$$

b) Par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = D^k Z_0$

or $Z_0 = P^{-1} W_0 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

et $D^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (\frac{1}{2})^k & & \\ & & (\frac{1}{3})^k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$

Donc $Z_k = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \times (\frac{1}{2})^k \\ \binom{n}{2} \times (\frac{1}{3})^k \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \times (\frac{1}{n+1})^k \end{pmatrix}$

$$\text{et } W_k = P Z_k = P D^k P^{-1} Z_0.$$

2) Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X_k=j) = (W_k)_j = (P Z_k)_{j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P_{j+1,i} (Z_k)_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \times \binom{n}{i-1} \times \left(\frac{1}{i}\right)^k$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} (-1)^j \binom{n}{i} \times \left(\frac{1}{i+1}\right)^k$$

$$= \sum_{i=j}^n \frac{i!}{j! (i-j)!} \times \frac{n!}{i! (n-i)!} \times \left(\frac{1}{i+1}\right)^k$$

$$= \sum_{i=j}^n (-1)^j \frac{n!}{j! (n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)! (n-i)!} \times \left(\frac{1}{i+1}\right)^k$$

$$= \binom{n}{j} \sum_{i=j}^n (-1)^j \binom{n-j}{i-j} \times \frac{1}{(i+1)^k}$$

$$\stackrel{\substack{\sim \\ i := i-j}}{=} \boxed{\binom{n}{j} \sum_{\tilde{i}=0}^{n-j} (-1)^j \binom{n-j}{\tilde{i}} \frac{1}{(\tilde{i}+j+1)^k}}$$

(d) Si $j \geq 1$, alors $\forall i \in \llbracket 0, n-j \rrbracket$, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n-j \rrbracket, \quad \frac{1}{(j+i+1)^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

(suite géométrique de raison comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$)

Donc $\forall j \geq 1, \quad P(X_k=j) \rightarrow 0$

$$\text{Comme } P(X_k=0) = 1 - \sum_{i=1}^n P(X_k=i) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{on a } P(X_k=0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$$

Cela signifie que presque sûrement, on finira par tirer le bon numéro 0.