

$$1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Ainsi: $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim_{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $B \notin GL_3(\mathbb{R})$.

2] On a : $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. f étant paire,

on s'intéresse aux asymptotes é vertuelles en -1 et $+1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ donc il y a une asymptote verticale

d'équation $x = 1$ (et par parité, une autre asymptote verticale d'équation $x = -1$)

En $+\infty$: on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2(1 + 1/x^2)} + \sqrt{x^2(1 - 1/x^2)} \\ &= |x| \times \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}) \times \frac{1}{x^4} \right) \\ &= |x| \times \left(1 - \frac{1}{2x^4} + 1 + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x - \frac{1}{2x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

et $f(x) = -2x + \frac{1}{2x^3} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

il y a une asymptote d'équation $y = 2x$ en $+\infty$
et $\mathcal{C}_f$ se trouve en dessous (car $-\frac{1}{2x^3} < 0$ en voisinage de $+\infty$).

Idem: une asymptote d'équation $y = -2x$ en $-\infty$
et $\mathcal{C}_f$ se trouve aussi en dessous.

3] On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i < j$, dans la i^{e} boîte
il sera impossible de trouver une boule numérotée j

ainsi : $\mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = 0$ lorsque $i < j$.

. Si $i \geq j$, on a, d'après la F.P.C.:

$$\mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}_{X=i}(Y=j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \boxed{\frac{1}{in}}$$

b) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en appliquant la t.p.t
avec le S.C.E $(\{X=1\}, \dots, \{X=n\})$ on a :

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^n P(X=i) \times \underbrace{P_{X=i}(Y=j)}_{= \begin{cases} \frac{1}{i} \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} \\ &= \sum_{i=j}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

c) Non car $P(X=1) \neq 0$ et $P(Y=2) \neq 0$
Mais $P((X,Y) = (1,2)) = 0$.

$$\begin{aligned} d) E(Y) &= \sum_{j=1}^n j P(Y=j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(n \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n+3}{2} = \boxed{\frac{n+3}{4}}. \end{aligned}$$