

TD 22 : Espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 1:

 $\forall x \in]-1; 1[$, on définit f et g par:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. $M_q(f; g)$ est une famille libre de $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$M_q \lambda f + \mu g = 0 \quad \forall x \in]-1; 1[, \quad \lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

• En évaluant en 0, on a:

$$\lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

$$\text{i.e. } -\lambda + \mu = 0 \quad \checkmark$$

• En évaluant en $\frac{1}{2}$, on a:

$$\lambda f\left(\frac{1}{2}\right) + \mu g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{\frac{1}{2}-1} \lambda + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \mu = 0$$

$$\text{donc } -2\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{On a alors: } \begin{cases} -\lambda + \mu = 0 \\ -2\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ -2\mu + \frac{2}{3}\mu = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\text{Conclusion: } \forall x \in]-1; 1[, \lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \Rightarrow (\lambda = \mu = 0) \quad \checkmark$$

2. Mg $h: x \mapsto \frac{2}{x^2-1} \in \text{vect}(f; g)$

On pose $F = \frac{2}{x^2-1} = \frac{P}{Q}$, à priori $F = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ ✓

$$\bullet \frac{P}{Q} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

évaluation de $\frac{P}{Q}$ en -1 :

$$\frac{P}{Q}(-1) = -1 \quad \checkmark \text{ donc } a = -1 \quad \checkmark$$

évaluation de $\frac{P}{Q}$ en 1 :

$$\frac{P}{Q}(1) = 1 \quad \text{donc } b = 1$$

$$\text{donc } F = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi } h(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$\forall x \in]-1, 1[$

$$h(x) = -g(x) + f(x)$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$(1, -1) \in \mathbb{R}^2$, donc h peut s'écrire comme combinaison linéaire de f et g . ✓

Conclusion, $h \in \text{vect}(f; g)$ ✓