

Grégory
Gael
Séganien

T.D 2.1 : Espaces Vectoriels

Exercice 6 :

Soient $P_1 = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $P_2 = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$

On veut montrer que : $P_1 = P_2$. On remarque que :

En posant : $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (3, 7, 0)$
 $v_1 = (1, -1, -2)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$

On a :

$u_2 = u_1 + 3v_1$ ✓
 $v_2 = 2u_1 - v_1$ ✓

Il faut
les intervertir

Il vient que :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(u_1, v_1) &= \text{Vect}(u_1 + 3v_1, 2u_1 - v_1; \underbrace{u_1, v_1}_{\text{qui sont eux-mêmes}}) \\ (\text{car combinaison linéaire}) &= \text{Vect}(u_1 + 3v_1, 2u_1 - v_1) \\ &= \text{Vect}(u_2, v_2) \end{aligned}$$

Qui sont eux-mêmes
combinaisons linéaires
des 2 premiers
(à justifier)

d'où $P_1 = P_2$. ✓
c.q.f.d.

Exercice 9 (a) :

Soit $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x-y, y-z) \end{cases}$

Montrons qu'elle est linéaire :

On considère $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
on a alors,

$$\begin{aligned}
& f_1(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\
&= ((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda y + y') - (\lambda z + z')) \\
&= (\lambda(x - y) + (x' - y'), \lambda(y - z) + (y' - z')) \\
&= \lambda((x - y), (y - z)) + ((x' - y'), (y' - z')) \\
&= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z')
\end{aligned}$$

Ce qui montre que f_1 est linéaire.