

TABLE
John
MPST

TD 21: Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 5

Constitué d'

① $\rightarrow$ mque $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

sev. 1] $F \subset \mathbb{R}^3$ (prend des éléments de $\mathbb{R}^3$)

sev. 2] $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ en effet, $0 - 2 \times 0 = 0$ ✓

sev. 3] stabilité par combi linéaire ?

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(F_1, F_2) \in F^2$, on a

$$\begin{aligned}\lambda F_1 + F_2 &= \lambda(x, y, z) + (x', y', z') \\ &= (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')\end{aligned}$$

$$\text{et } (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') = \lambda(x - 2y) + \underbrace{x' - 2y'}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

D'où $\lambda F_1 + F_2 \in F$ ✓

D'où F est stable par combinaison linéaire ✓

Conclusion: F est un sev. de $\mathbb{R}^3$ ✓

$\rightarrow$ de même, pour $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0\}$,
on obtient par un raisonnement très similaire

sev. 1] $G \subset \mathbb{R}^3$ ✓

sev. 2] $0 + 2 \times 0 = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in G$ ✓

sev. 3] $\lambda \in \mathbb{R}$, $G_1, G_2 \in G^2$ /

$$2G_1 + G_2 = (2x + x', 2y + y', 2z + z')$$

$$\text{i.e. } (2y + y') + 2(2z + z')$$

$$= 2(y + 2z) + \underbrace{y' + 2z'}_{=0} = 0 \quad \checkmark \rightarrow \text{donc LBN!}$$

Conclusion: G est un sev. de $\mathbb{R}^3$

② Pour observer si F et G sont en somme directe, intéressons-nous aux éléments de $F \cap G$. Ceux-ci sont les éléments de $\mathbb{R}^3$ vérifiant:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2 \text{ inconnues,} \\ 2 \text{ lignes} \end{cases}$
 $\downarrow$
équations

Ce système possède une infinité de solutions, ce qui montre que $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et que donc F et G ne sont pas en somme directe.

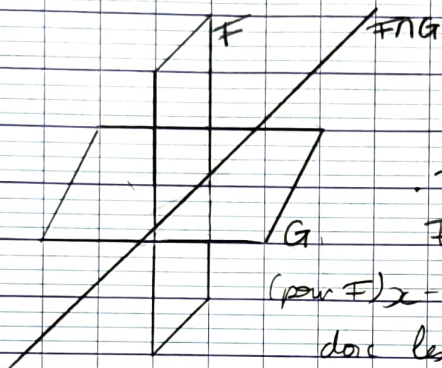
Donner en au moins une non-nulle

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus, pour $\begin{cases} x-2y=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$,

on obtient $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ z = -\frac{1}{4}x \end{cases}$, d'où les éléments de $\mathbb{R}^3$ appartenant aux deux sous-espaces sont de la forme $(x, \frac{1}{2}x, -\frac{1}{4}x)$ ~~droite~~



↳ dirigée par ce même vecteur

$x \times \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ✓

F et G sont des plans

En effet, x, y, z tels que

(pour F) $x-2y=0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$, représente

donc les éléments de la forme $(x, \frac{1}{2}x, z)$

$= x\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) + z\left(0, 0, 1\right)$ } dirigée par deux vecteurs (plan).

et c'est pareil pour G.

Bien

Exercice 6 Si $P_1 = \text{vect}((2, 3, -1); (1, -1, 2))$

$= \{u(2, 3, -1) + v(1, -1, 2), (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$

$P_2 = \text{vect}((3, 7, 0); (5, 0, -7))$

$= \{u(3, 7, 0) + v(5, 0, -7), (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$

$P_1 \subset P_2$ soit $x \in P_1$;

$(2, 3, -1)$: On cherche u et v tels que $\begin{cases} 2 = 3u + 5v \\ 3 = 7u \\ -1 = -7v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{vérif. } 3 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{1}{7} = \frac{14}{7} = 2 \checkmark \\ u = \frac{3}{7} \\ v = \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{donc } (2, 3, -1) \in P_2 \checkmark \text{ pour le choix}$

$(1, -1, 2)$: On cherche u et v tels que $\begin{cases} 1 = 3u + 5v \\ -1 = 7u \\ -2 = -7v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{vérif. } 3 \times (-\frac{1}{7}) + 5 \times (\frac{2}{7}) = \frac{-3+10}{7} = 1 \\ u = -\frac{1}{7} \\ v = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{donc } (1, -1, 2) \in P_2$
également pour x choisi. ✓

Ainsi, si ces deux vecteurs $\in P_2$, alors chacune de leurs combinaisons linéaires $\in P_2$ également, d'où

$$P_1 \subset P_2 \quad \checkmark$$

$$[P_2 \subset P_1] \text{ soit } x \in P_2.$$

→ même chose, ça marche, mais flemme de faire là

conclusion: $P_1 = P_2$

(Chapitre 22)

→ Avec un argument de dimension, on peut rendre plus rigoureux cet acte de flemmardise !