

TD 21: Espaces vectoriels

Exo 4:

Intéressant pour $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{D}$

c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{D}$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et est constante
 ie $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon \\ \exists \lambda \in \mathbb{C} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \end{cases}$ → À partir de cela, si la suite converge : sa limite est λ .

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \lambda \in \varepsilon$ donc $\lambda = 0$

(Si l'on avait $\lambda > 0$, En choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ on aurait $\lambda \leq \frac{\lambda}{2}$, ABURDE)

Ainsi $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{D} \subset \{0\}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$

d) De plus, $\{0\}$ est constante et converge vers 0 donc $\in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{D}$. D'où $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{D} = \{0\}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente alors on note ℓ sa limite

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

on pose $v_n = u_n - \ell$ on a donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0. ✓

on a $u_n = v_n + \ell$ avec $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et ℓ peut être vu comme

une suite constante donc

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{D} \quad \checkmark$$

Exercice 2:

1. a) $A_1 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $A_2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en tant que suites croissantes et monotones.

b) Considérons la suite constante égale à 0.

$0 \in A_1$ car constante donc croissante;

$0 \in A_2$ car constante donc monotone.

c) A_1 n'est pas stable par multiplication par un scalaire. ✓

Contre-exemple: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = n$ et $\lambda = -1$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante mais $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. ✓ et surtout: n'est pas croissante

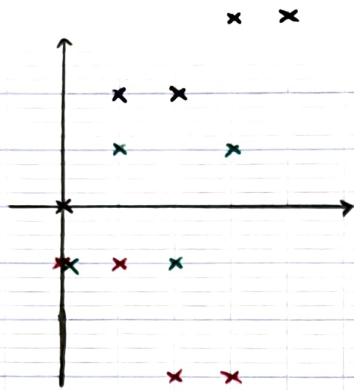
A_2 n'est pas stable par combinaison linéaire.

Contre-exemple:

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} -n & \text{si } n \text{ impair} \\ -n-1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$



On a bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotones mais $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pas monotone. ✓

A_1 et A_2 ne sont pas $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ✓

2) a) $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en tant qu'ensemble des suites bornées. ✓

b) $\tilde{0} \in B$ car constante donc bornée. ✓

c) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à B et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\exists (M, M') \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$. ✓

$$\text{Donc } |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq \underbrace{(|\lambda| M + M')}_{= M''} \quad \checkmark$$

$$|\lambda u_n + v_n| \leq M'' \text{ donc } (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B.$$

B est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ✓

3) a) $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en tant qu'ensemble des suites périodiques. ✓

b) $\tilde{0}$ est constante donc périodique donc $\tilde{0} \in C$. ✓

c) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à C de périodes respectives k_1 et k_2 ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+k_1} = u_n$$

$$v_{n+k_2} = v_n$$

$$\text{On pose } w_n = \lambda u_n + v_n$$

$$\text{On a } w_n = \lambda u_{n+k_1} + v_{n+k_2} \\ = w_{n+(k_1 \vee k_2)} \quad \checkmark$$

$$w_n \in C \text{ ie } (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C.$$

C est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ✓

car on a besoin d'une période à la fois de u et de v donc on choisit le ppcm de leur période.

Très bien. Wimporti quel multiple commun des périodes est une période commune: les k_i fonctionnent aussi.

Pas $\in$ mais $\subset$

4) a) $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en tant qu'ensemble des suites convergentes vers 1.

b) $\vec{0} \notin \mathcal{D}$ car ne converge pas vers 1. ✓

$\mathcal{D}$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ✓

5) a) $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en tant qu'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

b) Considérons $u_n = \vec{0}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \vec{0}$.
donc $u_{n+2} = \vec{0}$ et $u_{n+1} + u_n = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. ✓

c) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à E .
On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{On pose } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

On a:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda (u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n) \\ &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + \lambda u_n + v_n \\ &= w_{n+1} + w_n \quad \checkmark \end{aligned}$$

Donc $w_n \in E$. ✓

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ✓

Très bien.