

Long
Guillaume
Zyrie

Ex 16 TD 21

Soit E un $\mathbb{K}$ -Kev et $f \in \mathcal{L}(E)$

1) η $\ker(f) \subset \ker(f^2)$

$$\ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_E\}$$

$$\ker(f^2) = \{x \in E / f(f(x)) = 0_E\}$$

Soit $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0_E$ donc $f \circ f(x) = 0_E$ car

$$f(0_E) = 0_E \text{ car } f \in \mathcal{L}(E)$$

$$\text{donc } x \in \ker(f^2)$$

$$\text{On a } \boxed{\ker(f) \subset \ker(f^2)}$$

$$\eta$$
 $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

$$\text{Soit } \text{Im}(f^2) = \{y \in E / \exists x \in E / f(f(x)) = y\}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in E / \exists x \in E / f(x) = y\}$$

$$\text{Soit } x \in \text{Im}(f^2) \text{ alors } \exists x' \in E / f(f(x')) = x$$

$$\text{En posant } y = f(x'), \exists y \in E / f(y) = x$$

$$\text{donc } x \in \text{Im}(f)$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)}$$

$$2) \eta$$
 $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \iff \ker(f^2) = \ker(f)$

$$\implies \eta$$
 suppose $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$, η $\ker(f^2) = \ker(f)$

$$\supseteq$$
 inclusion démontrée en q1

$$\subseteq$$
 Soit $x \in \ker(f^2)$, alors $f(f(x)) = 0_E$

$$\text{donc } f(x) \in \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$$

$$\text{donc } f(x) = 0_E$$

$$\text{donc } x \in \ker(f)$$

$$\text{donc } \boxed{\ker(f^2) \subset \ker(f)}$$

$$\Leftarrow \eta$$
 On suppose $\ker(f^2) = \ker(f)$, η $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$

$$\text{Soit } x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f), \text{ alors } f(x) = 0_E \text{ et } \exists x' \in E / f(x') = x$$

$$\text{donc } f(f(x')) = 0_E$$

$$\text{donc } x' \in \ker(f^2) = \ker(f) \text{ donc } f(x') = 0_E$$

$$\text{donc } x = 0_E \text{ on a } \boxed{\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}}$$

$$3) \text{ } \forall q \ E = \ker(f) + \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$$

$\Rightarrow$ On suppose $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$, m.q. $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

$\subseteq$ démontré en q1 ✓

2) Soit $x \in \text{Im}(f)$, alors $\exists x' \in E / f(x') = x$ ✓

$$\text{Or } E = \{a+b, (a,b) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)\}$$

de plus $x' \in E$ donc $\exists (a,b) \in \ker(f) \times \text{Im}(f) / x' = a+b$

de plus $\exists b' \in E$ ~~avec~~ $b = f(b')$ avec $b' \in E$

$$\text{donc } f(x') = f(a) + f(b) \quad \checkmark \text{ car } f \in \mathcal{L}(E)$$

$$\text{donc } x = f(a) + f(b) \quad \checkmark$$

$$= 0_E + f(f(b')) \quad \checkmark$$

$$\text{donc } x \in \text{Im}(f^2) \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ On suppose $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$, m.q. $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$

2) Soit $x \in \ker(f) + \text{Im}(f)$, $\exists (a,b) \in \ker(f) \times \text{Im}(f) /$

$$x = a+b \in \ker(f) + \text{Im}(f) \subset E \quad \text{donc } x \in E \text{ car } E \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev}$$

$$\ker(f) \subset E$$

$\subseteq$ Soit $x \in E$, m.q. $x \in \text{Im}(f) + \ker(f)$

Analyse: Soient $(a,b) \in \ker(f) + \text{Im}(f) / a+b = x$

$$\text{alors } f(a) + f(b) = f(x)$$

$$\text{Or } 0_E + f(f(b')) = f(x) \quad \checkmark$$

$$b' \in \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$$

$$\text{donc } f(x - f(b')) = 0_E$$

$$\text{donc } x - f(b') \in \ker(f)$$

Synthèse on pose $b = x - f(v)$

$$x = a + f(v) \quad \text{donc } f(b) = f(x) - f^2(v) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{donc } x = f(v) + b \quad \checkmark$$

$$\text{avec } f(v) \in \text{Im}(f) \text{ et } b \in \ker(f) \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi } E \subset \text{Im}(f) + \ker(f) \quad \checkmark$$

~~2) p. 11~~
 ~~$x = f(x')$~~
 ~~$= f(a+b)$~~
 ~~$= f(a)$~~

Rem:
 $\ker(f) \subset E$
 $\text{Im}(f) \subset E$
donc cette
inclusion
est toujours
vraie.

$f(b')$ pour un certain $b' \in E$
Pos $b' = f(b'')$
donc $b' \in \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

$$\text{donc } f(f(b')) = f(0) \quad \checkmark$$

$$\text{on a } f(x) = f^2(b') = f(0) \quad \checkmark$$