

Exercice 10.

$$(a) \quad g_1: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \operatorname{Re}(z) \end{cases}$$

$$\text{Lait } (z_1, z_2) \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2$$

$$\begin{aligned} g_1(\lambda z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(\lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \\ &= \lambda g_1(z_1) + g_1(z_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Lait } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda = \alpha + i\beta$$

$$\begin{aligned} g_1(\lambda z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(\lambda z_1 + z_2) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \end{aligned}$$

il faut un contre-exemple

↳ Par exemple

$$\operatorname{Re}(i \times 1) = 0$$

donc g_1 est $\mathbb{R}$ -linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire $\checkmark$ $\times i \times \operatorname{Re}(1)$.

$$\begin{aligned} \ker(g_1) &= \{z \in \mathbb{C}, g_1(z) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \end{aligned}$$

$$= i\mathbb{R} \quad \checkmark = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Noncar $0 \notin \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Im}(g_1) = \{g_1(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

$$= \operatorname{Re}(\mathbb{C})$$

$$= \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$(b) \quad g_2: \begin{cases} \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ u \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} u \end{cases}$$

$$\text{Lait } (u, v) \in \mathcal{C}^2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} g_2(\lambda u + v) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda u + v) \\ &= \lambda \lim(u) + \lim(v) \end{aligned}$$

$$g_2(\lambda u + v) = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} u + \lim_{t \rightarrow \infty} v \\ = \lambda g_2(u) + g_2(v)$$

car u et $v \in \mathcal{C}$ donc converge

g_2 est donc $\mathbb{C}$ -linéaire donc $\mathbb{R}$ -linéaire également. ✓

$$(c) \quad g_3: \begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_a^b f(x) dx \end{cases}$$

Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$g_3(\lambda f_1 + f_2) = \int_a^b \lambda f_1(x) + f_2(x) dx$$

$$= \lambda \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$= \lambda g_3(f_1) + g_3(f_2)$$

Pas de λ ici: on ne cherche pas une primitive, mais on calcule une intégrale!

car $\lambda = cte \in \mathbb{C}$

g_3 est donc $\mathbb{C}$ -linéaire donc $\mathbb{R}$ -linéaire aussi. ✓

$$(d) \quad g_4: \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y \longmapsto y'' - 4y \end{cases}$$

Soit $(y_1, y_2) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$g_4(\lambda y_1 + y_2) = \lambda y_1'' + y_2'' - 4(\lambda y_1 + y_2)$$

$$= \lambda(y_1'' - 4y_1) + y_2'' - 4y_2$$

$$= \lambda g_4(y_1) + g_4(y_2)$$

Donc g_4 est $\mathbb{C}$ -linéaire donc est $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\ker(g_4) = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / g_4(y) = \vec{0}\}$$

$$= \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / y'' - 4y = 0\}$$

Exercice 10: (suite)

(d) suite

On résout (E): $y'' - 4y = 0$

E.C : $r^2 - 4 = 0$ donc $r = \pm 2$

D'après $y: t \mapsto \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-2t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Ainsi, $\text{Ker}(g_4) = \left\{ y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid y: t \mapsto \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-2t} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \text{vect}(\underbrace{t \mapsto e^{2t}}_{\text{non nul}}, t \mapsto e^{-2t})$ ✓ T.B

(e) $g_5: \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a) \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Pour $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[x]$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} g_5(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(a) \quad \checkmark \\ &= (\lambda P_1)(a) + P_2(a) \quad \checkmark \\ &= \lambda P_1(a) + P_2(a) \\ &= \lambda g_5(P_1) + g_5(P_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Donc g_5 est $\mathbb{C}$ -linéaire donc $\mathbb{R}$ -linéaire ✓

$$\begin{aligned} \text{Ker}(g_5) &= \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(a) = 0 \right\} \\ &= \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x] \mid (x-a) \mid P \right\} \\ &= \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P = (x-a)(\alpha x + \beta) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(g_5) = \text{vect}((x-a), x(x-a)) \quad \checkmark$$

$$\text{Im}(g_5) = \left\{ P(a) \mid P \in \mathbb{R}_2[x] \right\}$$

$= \mathbb{R} \quad \checkmark$ car il y a toujours un polynôme
non nul en a .