

Ewen

ATIAMAN

Nandha

TD 2.1 sur 14

Guendal Jules  
Mathia Bural

1) Montrons que  $g \circ f$  est un projecteur,  
 $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \text{id}_E \circ f = g \circ f$  ✓ car  $f \circ g = \text{id}_E$  ✓

Donc  $g \circ f$  est un projecteur. ✓

2) Ma  $\ker(f) = \ker(g \circ f)$

⊂ Soit  $x \in \ker(f)$ ,  $f(x) = 0_E$ , alors  $g \circ f(x) = g(0_E) = 0_E$  ✓  
 car  $g \in \mathcal{L}(E)$  donc  $x \in \ker(g \circ f)$   $x \in \ker(g \circ f)$   
 On a : alors  $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$  ✓

⊃ Soit  $x \in \ker(g \circ f)$ ,  $g(f(x)) = 0_E$   $f \circ g(f(x)) = f \circ g \circ f(x) = f(0_E)$   
 par composition par  $f$   
 On a  $f \circ g \circ f(x) = f(x) = f(0_E) = 0_E$  donc  $x \in \ker(f)$  ✓

Donc on a  $\boxed{\ker(f) = \ker(g \circ f)}$  ✓

Ma  $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$

⊂ Soit  $y \in \text{Im}(g)$ , alors  $\exists x \in E$  ✓  
 $g(x) = y$ ,  $f(y) = f(g(x)) = x$  par  
 composition par  $f$   
 Donc  $g(f(y)) = y$  ✓,  $y \in \text{Im}(g \circ f)$  ✓

⊃ Soit  $y \in \text{Im}(g \circ f)$ , alors  $\exists x \in E$  ✓  
 $g \circ f(x) = y = g(f(x)) = y$  Donc  $y \in \text{Im}(g)$  ✓

Donc  $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$  ✓