

Exercice 8:

1) Idée : dérivons successivement

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \times \frac{2}{x^3}$ ✓

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \times \left(\frac{-6}{x^4} \right) + \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \times \frac{2}{x^3}$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right)$$

avec $P \in \mathbb{K}[X]$

Conjecture: Les dérivées successives de f semblent être en $e^{-\frac{1}{x^2}} P\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, Prouvons par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n): f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.

I] On a $f^{(0)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x^0}$ d'où $\mathcal{H}(0)$ en posant $P_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^0}$

II] Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}(n)$ prouvons $\mathcal{H}(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \times \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P_n'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) + P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit $P_0 = X$
mais quand on l'applique en $\frac{1}{x}$, on trouve $\frac{1}{x}$.

II] même un $-\frac{1}{x^2}$.

en posant $P_{n+1} = 2X^3 P_n + X^4 P_n'$, on a $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$
d'où $\mathcal{H}(n+1)$.

C] On a $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ vérifiées donc avec $x \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a
 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $P_n \in \mathbb{K}[X]$.
 $= f(x) P_n\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = m$. Et, $\forall k \in [1, m]$, $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
par croissances comparées.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ ✓, donc $f^{(n)}$ est prolongeable par continuité en

0. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. ✓

Ainsi, grâce à la formule de Taylor Young, on peut affirmer que:

$$f(x) = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + o_0(x^n) \\ = o_0(x^n) \quad \checkmark$$

est un développement limité de f en 0 à l'ordre n . $\checkmark$

2) Deux fonctions de classe C^∞ qui ont le même développement limité à tout ordre ne sont pas forcément égales. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
 $e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$ et pourtant f et $\tilde{0}$ admettent une partie régulière nulle dans leur développement à l'ordre n . $\checkmark$