TD 20 : Analyse asymptotique

CHARAFOUDINE Allan
ESPOSITO Tom
GIOIA Ethan

Exercice 1 :

1ère Méthode : On a :

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ ✓

$\tan''(x) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$ ✓

$\tan^{(3)}(x) = 8\tan^2(x) + 6\tan^4(x) + 2$ ✓

$\tan^{(4)}(x) = 16\tan(x) + 40\tan^3(x) + 24\tan^5(x)$

Cette méthode est compliquée !

$\tan(0) = 0$, $\tan'(0) = 1$, $\tan''(0) = 0$, $\tan^{(3)}(0) = 2$, $\tan^{(4)}(0) = 0$

$\tan^{(5)}(0) = 16$

Donc $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

2e Méthode

$\int_0^x \tan(t)\,dt$

$= -\ln(\cos(x))$

Puis dire $= -\ln(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{= v})$

car $x \to 0$

$= -\ln(1 - (1 - \cos(x)))$

On pose $u = 1 - \cos(x)$

$= -\ln(1-u)$

$= u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^6)$

$= \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right)^1$

$+ \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right)^2$

$+ \frac{1}{3}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right)^3$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) \underset{x\to 0}{=} \int \tan'(x)$$

Nous savons que tan admet un DL pour tout ordre en 0, donc :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$ ✓

3ème Méthode

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-\sin^2(x)}$$

Rem : avec un DL de $u = \sin(x)^2 \sim x^2$

on a $1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$

Or $u = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$

Donc $u = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\sin(x))} \times \frac{1}{(1-\sin(x))}$$

$$f'(x) = \frac{1/2}{1+\sin(x)} + \frac{1/2}{1-\sin(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}$$ on pose $u = \sin(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k + \sum_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=0}^{n} u^{2k} + o(u^{2n})\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u^{2k} + o(u^{2n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sin^{2k}(x) + o(\sin^{2n}(x))$$

N'oubliez pas ce petit $o(x^4)$

On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

Donc :

$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^0 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + o(x^4)$$

$$g = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

d'où $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Charafoudine Allan
Esposito Tom
Gioia Ethan