

Matteo
BUREL

Ewen GIGAN

GRONDIN

Enzo

POUSSE DE

SACCO

TD 20

Ex 7:

On cherche à montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{a}{2}x^2 + o(x^2)$ en utilisant la formule de Taylor-Young

donc $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ ~~donc~~ $-x^3 \leq x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^3$
 $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ car $\frac{x^3}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ✓

$-x^3 \leq f(x) - (1 + x + x^2) \leq x^3$ ce qui prouve que $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ ✓

Pas
nécessaire:

Comme f
admet un

DL 1 (obtenu
à l'ordre 1),

il est donc
dérivable.

✓ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ donc $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 = f'(0)$$

$$f(x) = f(0) + x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - 1}{x} = \frac{2x + 3x^2 \sin(1/x)}{x} = 2 + 3x \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$$

Dites plutôt:
f n'a pas de
dérivée seconde en 0.

$\sin(1/x) \in [-1; 1]$ donc $\exists \text{ un } \sin(1/x) \rightarrow 0$

$\cos(1/x) \in [-1; 1]$ donc prend $x \rightarrow 0$ $f''(x)$ n'existe pas en 0

Pour prouver

que $\cos(1/x)$ n'a pas de
limite en 0, on peut
considérer les 2 limites.

$$\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) \rightarrow +1$$

$$\text{et } \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}}\right) \rightarrow -1$$