

AMOURDOM Némie  
ANDRIAMBÉLO Harikana  
BERTHELOT Mathilde  
HOARAU  
Janina

## TD 20 : Analyse asymptotique

Soit  $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

1)  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  car  $\forall x \in \mathbb{R}^*, e^{\frac{1}{x}} > 0$  ✓

Étude en 0 :

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$  : donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1} = 0}$  ✓  
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$

•  $\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  : donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0}$  ✓  
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0  
~~par~~ et  $f(0) = 0$ . ✓

ainsi prolongée  
 donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Rem :  
 on DL à l'ordre 1  
 ça ne fonctionne pas

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x} \\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\infty} = 0 \end{aligned}$$

alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  Non

donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

donc  $f$ , étant composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ , est elle-même dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

$$2) \quad f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{on pose } u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{alors : } f(x) = \frac{x}{1+e^u} = \frac{x}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\stackrel{=}{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 \left( 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)}$$

$$\stackrel{=}{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]}$$

$$\stackrel{=}{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

Ce terme est inutile car il y a un  $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  dans le calcul

$$+ \left[ \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{16x^4} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^4}\right) \right]$$

$= v^2$

$$\stackrel{=}{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right] + o_{+0}\left(\frac{1}{x}\right) + \left[ \frac{1}{32x^3} + o_{+0}\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]$$

$\uparrow$   
asymptote en  $+\infty$

$= o_{+0}\left(\frac{1}{x}\right)$

Ce terme est inutile car il y a un  $o\left(\frac{1}{x}\right)$

pour trouver la position, il fallait au final faire le DL de  $e^u$  à l'ordre 3.

→ On n'a aucune garantie que le véritable coefficient devant  $\frac{1}{x^5}$

soit  $\frac{1}{32}$ .