

TABIE

Exercice 187

Jolan

MPSTI

St-GERMAIN

Aure

POLIFRONI

Abbin

a) * $\mathbb{C}(X) : F_1 = \frac{X+i}{X^2+iX+1}$ } pas de partie entière E (deg = -1) ✓

On décompose $X^2+iX+1 \rightarrow \Delta = i^2 - 4 \times 1 \times 1 = -5$
 $\omega_1 = \frac{-i}{2}(1+\sqrt{5})$ et $\omega_2 = \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})$ ✓

d'où $F_1 = \frac{a}{X + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})} + \frac{b}{X + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})}$ ✓

Déterminons a et b :

* Multiplication par $(X + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5}))$ évaluation en $-\frac{i}{2}(1+\sqrt{5})$:
 $F_1(X + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})) \left(\frac{-i}{2}(1+\sqrt{5}) \right) = \frac{-iX(1+\sqrt{5}) + 2i/2}{\underbrace{\frac{-i}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5})}_{\text{valeur évaluée}}} \quad \checkmark$
 $= \frac{-1-\sqrt{5}+2}{-1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} (= a)$

* Multiplication par $(X + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5}))$ évaluation en $-\frac{i}{2}(1-\sqrt{5})$:
 $F_1(X + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})) \left(\frac{-i}{2}(1-\sqrt{5}) \right) = \frac{-iX(1-\sqrt{5}) + 2i/2}{\underbrace{\frac{-i}{2}(1-\sqrt{5}) + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})}_{\text{valeur évaluée}}} \quad \checkmark$
 $= \frac{-(1-\sqrt{5})+2}{-(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} (= b)$

$F_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{(X + \frac{i}{2}(1+\sqrt{5}))(2\sqrt{5})} + \frac{1+\sqrt{5}}{(X + \frac{i}{2}(1-\sqrt{5}))(2\sqrt{5})}$ ✓

pas possible sur $\mathbb{R}(X)$

b) $F_2 = \frac{4X^7}{X^4-1}$ } deg = 7-4 = 3 > 0 : on cherche la partie entière.

$\begin{array}{r} 4X^7 \\ -(4X^7 - 4X^3) \\ \hline 4X^3 \end{array}$	$\begin{array}{r} X^4 - 1 \\ 4X^3 \\ \hline \end{array}$	, donc $F_2 = 4X^3 + \frac{4X^3}{X^4-1}$ $= E + \frac{4X^3}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}$ ✓
--	--	---

Rem :

$4X^3 = (X^4-1)'$

DÉS sur $\mathbb{C}(X)$:

$F_2 = E + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{X-i}$

On a :

conjugaison : $\overline{F_2} = \overline{F_2}$, d'où $\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{X-i} = \frac{\overline{\alpha}}{X-1} + \frac{\overline{\beta}}{X+1} + \frac{\overline{\gamma}}{X-i} + \frac{\overline{\delta}}{X+i}$
d'où $\delta = \overline{\gamma}$

impairité: on remarque que $F_2(-X) = \frac{(-X)^7}{(-X)^4 - 1} = -F_2(X)$,
 d'où: $\frac{X}{-X-1} + \frac{\beta}{-X+1} + \frac{\gamma}{-X+i} + \frac{\bar{\gamma}}{-X-i} = -\left(\frac{X}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\bar{\gamma}}{X-i}\right)$

i.e. par identification, $x = \beta$

derivée tête en bas:

On remarque que pour $F_2 = \frac{P}{Q}$,

$$\frac{P}{Q'} = \frac{4x^7}{4x^3} = x^4. \text{ Ainsi,}$$

$$x = 1^4 = \beta$$

$$\text{et } \gamma = (-i)^4 = 4 = \bar{\gamma} = \delta$$

$$\text{d'où } F_2 = \left(\frac{1}{(X+1)} + \frac{1}{(X-1)} + \frac{1}{(X+i)} + \frac{1}{(X-i)} \right)$$

* sur $R(x)$: on rassemble les pôles complexes conjugués

$$F_2 = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{(x-i) + (x+i)}{(x^2+1)} \right) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} \right)$$

c) $F_3 = \frac{1}{1 - 2\cos(\theta)x + x^2}$
 sur $\mathbb{C}(x)$.

$\deg < 0 \Rightarrow$ pas de partie entière ✓

On remarque que $F_3 = \frac{1}{x^2 - (\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta))x + 1}$

$$= \frac{1}{x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1} = \frac{1}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{a}{(x - e^{i\theta})} + \frac{b}{(x - e^{-i\theta})} \quad \checkmark$$

conjugue: $F_3(x) = \overline{F_3(x)}$

$$\text{d'où } \frac{a}{(x - e^{i\theta})} + \frac{b}{(x - e^{-i\theta})} = \frac{\overline{a}}{(x - e^{-i\theta})} + \frac{\overline{b}}{(x - e^{i\theta})}$$

D'où $a = \overline{b}$

multiplication par $(x - e^{-i\theta})$, évaluation en $e^{i\theta}$

$$F_3(x - e^{-i\theta}) \underbrace{(e^{i\theta})}_{\text{valeur évaluée}} = \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = b, \text{ d'où } a = b = \frac{1}{2i\sin(\theta)}$$

d'où, finalement,

$$F_3 = \frac{1}{2i\sin(\theta)} \left(\frac{x - i}{x - e^{i\theta}} + \frac{x + i}{x - e^{-i\theta}} \right)$$

Non: $2i\sin\theta$.

sur $\mathbb{R}(x)$: on fait une distinction de cas.

$$\Delta = (-2\cos(\theta))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4\cos^2(\theta) - 4$$

* si $\theta \equiv 0 [\pi]$, alors $\cos(\theta) = 1$ ou -1 , d'où $\cos^2(\theta) = 1$ et $\Delta = 0$

Dans ce cas-là, F_2 peut s'écrire

↳ si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, $\cos(\theta) = 1$

$$F_2 = \frac{1}{(x + \frac{2\cos(\theta)}{2})^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \checkmark$$

↳ si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, $\cos(\theta) = -1$:

$$F_2 = \frac{1}{(x + \frac{2\cos(\theta)}{2})^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \checkmark$$

* sinon, généralisons:

$$F_2 = \frac{1}{1 - 2\cos(\theta)x + x^2}$$

seulement, non réductible en bas ($\Delta < 0$) $\checkmark$

Exercice 17 Soit $P = \frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2}{x^3(x^4 - 1)^2}$

On veut déterminer a, b et c tels que 0 est pôle triple de P , -1 est pôle simple de P , et ce sont les seuls pôles réels. On a:

$$P = \frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2}{x^3((x+1)(x-1)(x^2+1))^2}$$

On remarque que puisque 1 et -1 sont censés être pôles doubles de P , alors cela signifie qu'on cherche a, b et c tels que 1 est au moins racine double de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$, et tels que -1 est pôle simple seulement (afin de rendre le numérateur factorisable, et de supprimer les pôles). Donc, on veut que la division euclidienne de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ par $(x-1)^2(x+1)$ ait un reste qui est $0_{\mathbb{R}[x]}$ $\checkmark$

On obtient:

$$\begin{array}{l|l}
 x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 & (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1 \\
 - (x^4 - x^3 - x^2 + x) & x + a + 1 \\
 \hline
 (a+1)x^3 + (b+1)x^2 + (c-1)x + 2 & \\
 - ((a+1)x^3 - (a+1)x^2 - (a+1)x + a+1) & \\
 \hline
 (a+b+2)x^2 + (a+c)x + 2-a-1 & \\
 \hline
 \underbrace{\hspace{10em}}_{:= R} &
 \end{array}$$

On sait que $R = (a+b+2)x^2 + (a+c)x + 2-a-1$

Or, $R = 0_{\mathbb{R}[x]}$ selon nos conditions, d'où, par identification :

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ a+c=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2-a = -2-1 = -3 \\ c = -a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le seul polynôme P vérifiant ces conditions est :

$$P = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)^2}$$

et, si on factorise en haut grâce à notre division euclidienne,

$$P = \frac{(x-1)^2(x+1)(x+1+1)}{x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{x+2}{x^2(x^2+1)^2} \quad \checkmark ? \text{ NICKEL } \checkmark$$