

TD : 25/03/25

Russe Enzo

Jolivet Simon

MPSI

Exercice 25 :

a. Soit $f(x) = \frac{x^3+2}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+2}{x^3+x}$

Le degré de f étant nul, on fait la division euclidienne de (x^3+2) par (x^3+x) :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}+2 & \cancel{x^3}+x \\ -x^3-x & 1 \\ \hline -x+2 & \end{array}$$

Remplacer tous les x par $\cancel{x}$

donc $(x^3+2) = (x^3+x) + (-x+2)$

donc $f(x) = \frac{(x^3+x) + (-x+2)}{(x^3+x)} = 1 + \frac{-\cancel{x}+2}{\cancel{x^3}+\cancel{x}}$

Maintenant, faisons la DES de $\frac{-x+2}{x(x^2+1)}$ (irréductible)

On a $\frac{-x+2}{x(x^2+1)} = \frac{-x+2}{x(x-i)(x+i)}$ car $0, i$ et $-i$ sont pôles de la fraction

Décomposition en fractions

$$\frac{-x+2}{x(x-i)(x+i)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-i} + \frac{\gamma}{x+i}$$

④ multiplication par x et évaluation en 0 :

on a $\frac{2}{\cancel{x+2}} = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$

$\frac{-i \times i}{\cdot} = -i^2$ (ce qui n'est pas $(-i)^2$)

② multiplication par ~~(x-i)~~ et évaluation en i :

$$\text{on a } \frac{-i+2}{i(2i)} = \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1 + \frac{1}{2}i} \quad \checkmark$$

③ multiplication par $(x+i)$ et évaluation en $-i$:

$$\text{On a } \frac{2+i}{-i(-2i)} = \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = -1 - \frac{1}{2}i} \quad \checkmark$$

* on aurait pu directement dire que $\gamma = \bar{\beta}$ car racine conjuguée de x^2+1 .

Finalement, on a

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{-1+\frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{-1-\frac{1}{2}i}{x+i}$$

$$\begin{aligned} \text{on } \frac{-1+\frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{-1-\frac{1}{2}i}{x+i} &= \frac{(-1+\frac{1}{2}i)(x+i) + (-1-\frac{1}{2}i)(x-i)}{x^2+1} \\ &= \frac{-2x-1}{x^2+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(x) &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{-2x-1}{x^2+1} \\ &= 1 + \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

On note F une primitive de f ,

$$\boxed{F(x) = x + 2\ln|x| - \ln(x^2+1) - \arctan(x)} \quad \checkmark$$