Andrambelo Haritiana AMOURDOM Noémie HOAREAU Samia BERTHELOT Mathilde

MPSI TD 19

Exercice 16 :

(b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=18 \end{cases}$

Résoudre ce système revient à trouver les racines du polynôme unitaire $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$

avec $\begin{cases} \sigma_1 = x+y+z \\ \sigma_2 = xy+yz+xz \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$

- Par identification : $\underline{\sigma_1 = x+y+z = 0}$

- Calcul de σ_1^2 :

$\sigma_1^2 = (x+y+z)^2$
$= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$
$= x^2+y^2+z^2 + \underbrace{2xy+2xz+2yz}_{=\sigma_2}$
$\sigma_1^2 = x^2+y^2+z^2 + 2\sigma_2$

Donc $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=14} = \overset{=0}{\sigma_1^2} - 2\sigma_2$ donc $\boxed{\sigma_2 = -7}$

- Calcul de σ_1^3 :

$\sigma_1^3 = (x+y+z)^3$
$= (x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz))(x+y+z)$
$= x^3+y^3+z^3 + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$
$+ 2(xy+xz+yz)(x+y+z)$

Or $\sigma_1\sigma_2 = (x+y+z)(xy+yz+xz)$
$= x^2y + xyz + x^2z + xy^2 + y^2z + xyz + xyz + yz^2 + xz^2$
$= 3\sigma_3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2$

$xyz = \sigma_3$

i.e $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2x$

Donc $\sigma_1^3 = x^3 + y^3 + z^3 + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$

i.e. $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 14 \\ \sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -7 \\ \sigma_3 = 6 \end{cases}$$

Et donc, $P = X^3 - 7X - 6$

-1 en est une racine évidente :

$P(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$

Donc $(X+1) \mid P$:

$$\begin{array}{rl|l} & X^3 \qquad - 7X - 6 & X + 1 \\ \cline{3-3} - & (X^3 + X^2) & X^2 - X - 6 \\ \cline{2-2} & -X^2 - 7X - 6 & \\ - & (-X^2 - X) & \\ \cline{2-2} & -6X - 6 & \\ - & (-6X - 6) & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$P = (X+1)(X^2 - X - 6)$ ✓

Racines de $X^2 - X - 6$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$

$\Delta = 25$

Deux racines réelles : $\dfrac{1 \pm 5}{2 \times 1} = 3$ et -2

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S}=\{(-1;-2;3)\}}$

et toutes les triplets obtenus par permutation : $(3,-1,-2)$; $(3,-2,-1)$ etc.

Vérification :

- $-1-2+3=0$ /
- $(-1)^2+(-2)^2+3^2=1+4+9=14$ /
- $(-1)^3+(-2)^3+3^3=-1-8+27=18$ /

Exercice 14 :

Soit $P=X^3+2X-\pi$, on note a, b et c ses racines dans $\mathbb{C}$

$S_n=a^n+b^n+c^n$ ~~pour~~

On a : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ac=2 \\ abc=\pi \end{cases}$ ✓

- $S_{-2}=a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$
$=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ ✓
$=\dfrac{b^2c^2+a^2c^2+b^2a^2}{a^2b^2c^2}$ ✓

* $(bc+ac+ab)^2=b^2c^2+2bac^2+a^2c^2+2(bc+ac)ab+a^2b^2$
$=b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2+2c(abc)+2b(abc)+2a(abc)$
$=b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2+2(abc)(a+b+c)$

Donc $b^2c^2+ac^2+a^2b^2=(bc+ac+ab)^2-2(abc)(a+b+c)$ ✓

D'où $S_{-2} = \dfrac{(bc+ac+ab)^2 - 2(abc)(a+b+c)}{(abc)^2}$

$S_{-2} = \dfrac{2^2 - 2\pi \times 0}{\pi^2}$

$\boxed{S_{-2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}$ ✓

- $S_{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$= \dfrac{bc+ac+ab}{abc}$ ✓

$\boxed{S_{-1} = \frac{2}{\pi}}$ ✓

- $S_1 = a+b+c$

$\boxed{S_1 = 0}$ ✓

- $S_2 = a^2+b^2+c^2$

$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$ (voir exercice 6)

$= 0^2 - 2\times 2$ ✓

$\boxed{S_2 = -4}$ ✓

- $S_3 = a^3+b^3+c^3$

$= (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ac) + 3abc$

$\boxed{S_3 = 3\pi}$

Il manque un 3 ici