Espaces vectoriels

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Caractérisation de l'injectivité et la surjectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
f est injective sur E si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
f est surjective de E dans F si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

Proposition 2 Projecteur

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **projecteur** (ou projection linéaire) sur F parallèlement à G l'application p définie par :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{array} \right.$$

Connaître sans donner la démonstration : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.
f est alors le projecteur sur $F = \operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

Proposition 3 Symétrie

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application s définie par :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$$

Connaître l'équivalence des propositions suivantes, on demandera uniquement les démonstrations de $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (c)$ mais pas de $(c) \Rightarrow (a)$ Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. s est une symétrie
2. $s^2 = \mathrm{Id}_E$
3. $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur qui est appelé projecteur associé à s.

s est donc la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Im}(p) = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \ker(p)$
$= \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 4 Sous-famille et sur-famille

Soit X et Y deux familles non vides d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Si $X \subset Y$ et Y libre dans E alors X est libre dans E.
Si $X \subset Y$ et X liée dans E alors Y est liée dans E.

Proposition 5 Coordonnées dans une base

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ soit

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \text{ famille presque nulle de scalaires}, x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

La famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ constitue la famille des coordonnées du vecteur x dans cette base.

Proposition 6 Base adaptée à une somme directe

Soient F et G deux sev de E.
Si F et G sont en somme directe et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont respectivement des bases de F et G alors la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $F\oplus G$.
Une telle base est appelée **base adaptée** à la somme directe $F\oplus G$.
On en déduit $\dim(F\oplus G) = \dim(F)+\dim(G)$

Définition 1 Bases canoniques (il faudra justifier que ce sont bien des bases des espaces en question)

- $\mathbb{K}^n$ a pour base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ où $e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,e_n = (0,\dots,0,1)$.
- $\mathbb{K}[X]$ a pour base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base canonique $(1,X,\dots,X^n)$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour base canonique les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Proposition 7 Lemme (La démonstration est demandée avec une certaine indulgence)

Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice de E alors toute famille de $p+1$ vecteurs est liée.

À savoir faire

- ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre
- ☐ Montrer qu'une famille est génératrice
- ☐ Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},E)$,...)
- ☐ Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- ☐ Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- ☐ Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- ☐ Reconnaître un projecteur : on calcule $f\circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Idem avec les symétries : calculer $f\circ f$ (et vérifier que cela vaut Id) et $\ker(f-\mathrm{Id})$ ainsi que $\ker(f+Id)$

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels et b) Sous-espaces vectoriels (semaine 23)	
c) Familles de vecteurs :	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces Semaine 23	
Applications linéaires : a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v\circ u$. Notation u^k pour $u\in\mathcal{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2=p$, par $s^2=\mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u\in\mathrm{GL}(E)$ et $k\in\mathbb{Z}$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E=E_1\oplus E_2$, si $u_1\in\mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2\in\mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u\in\mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	