Espaces vectoriels

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Formule de Stirling & série harmonique Sans démonstration

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Définition 1 Espace vectoriel - Application linéaire - Sous-espace affine - Sommes directes

Donner les définitions de :

- $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel Et en donner 4 exemples différents
- $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E
- $(F_1,\dots,F_p)$ sont en somme directe.

Proposition 2 Intersections et unions de sous-espaces vectoriels

- Soit I un ensemble non vide.
  Si $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.
- Soient F et G deux sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.
  $F\cup G$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$

Proposition 3 Espace engendré par une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $X=(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, alors le sous-espace vectoriel de E engendré par X est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X, c'est-à-dire

$$\mathrm{vect}(X) = \mathrm{vect}(x_i)_{i\in J} = \left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i \cdot x_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{i\in J} \text{ famille finie de scalaires} \right\}$$

Proposition 4 Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, X et Y des parties de E.
• **Inclusion :** $X\subset Y \Longrightarrow \mathrm{vect}(X)\subset \mathrm{vect}(Y)$
• **Enlever un vecteur :**
Si $x\in X$ est combinaison linéaire des vecteurs de $X\backslash\{x\}$ alors $\mathrm{vect}(X) = \mathrm{vect}(X\backslash\{x\})$

Proposition 5

Soit I un ensemble non vide.
Si $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.

Proposition 6 Union de deux sev

Soient F et G deux sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.
$F \cup G$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

Proposition 7 Union et somme

Si F et G sont deux sous-espace vectoriel de E alors $F+G = \operatorname{vect}(F \bigcup G)$

Proposition 8 Caractérisation de la somme directe

F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$

Proposition 9 Caractérisation

Soient $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.
$F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe ssi

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i, \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E$$

Proposition 10 Théorème

L'ensemble des translations de E noté $\mathscr{T}(E)$ est un groupe abélien pour la composition.

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les développements limités
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$,...)
- ☐ Montrer qu'une somme de deux sous-ev est directe : on montre que l'intersection est réduite au singleton $\{O_E\}$

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires;*
- *présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\operatorname{vect}(A)$, $\operatorname{vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\operatorname{vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs : Pas pour le moment	
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.
Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i\in F_i$ est unique.
Applications linéaires : a) Généralités	
Application linéaire.	