

DS n°8.**Durée : 2 heures - Durée minimale obligatoire : 1 heure et 50 minutes****La calculatrice est interdite.****Exercice 1**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. En déduire la limite de u_n 2. Déterminer la limite, lorsque $x \rightarrow 0$, de :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

3. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(1) - \int_0^1 P(t)dt = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel, et en déterminer une base.4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x + y + z, x - y - z)$$

Montrer que f est linéaire. Déterminer une base de son noyau et de son image. f est-elle injective, surjective, bijective?**Exercice 2 : une équation différentielle.**On note $\Delta^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables, et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (H)$$

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\Delta^2(\mathbb{R})$.(b) Soit $f \in E$. On définit la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = f'(x) + xf(x)$.
Montrer que $\widehat{f} \in E$.2. On définit ainsi une application $U : E \rightarrow E; f \mapsto \widehat{f}$.(a) Montrer que U est un endomorphisme de E .(b) Montrer que U est une symétrie vectorielle de E .(c) On note F l'ensemble des fonctions appartenant à E et solutions de l'équation différentielle

$$(H_1) : \quad y' + (x-1)y = 0,$$

et G l'ensemble des fonctions appartenant à E et solutions de l'équation différentielle

$$(H_2) : \quad y' + (x+1)y = 0.$$

Montrer, à l'aide de la question précédente, que $E = F \oplus G$.(d) Résoudre les équations différentielles (H_1) et (H_2) . En déduire l'ensemble E .

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x\sqrt{1+\frac{x}{n}} = 1$. Dans toute la suite de l'exercice, on note x_n l'unique réel positif tel que $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}} = 1$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq 1$.
(b) En déduire que $x_n \rightarrow 1$.
3. (a) A l'aide d'un DL dans l'égalité $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}} = 1$, montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
(b) En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
(c) Déterminer un équivalent de $\ln(x_n)$.
4. Déterminer une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.