

DS n°7.**Durée : 4 heures - Durée minimale obligatoire : 3 heures et 50 minutes****La calculatrice est interdite.****Question de cours - Exercices d'application du cours**

1. Énoncer (avec les hypothèses) et démontrer la formule de Taylor-Young
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$
3. Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle suivante $A(X) = \frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$
4. Décomposer en produits d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + X^3 + 1$
5. Résoudre le système suivant
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + xz = 3 \\ xyz = -10 \end{cases}$$
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
 - (a) Démontrer que si z est racine de P alors $(z+1)^2$ et $(z-1)^2$ sont aussi racines de P
 - (b) En déduire qu'il existe une racine de P de module strictement supérieur à $|z|$.
Indication : calculer $(z+1)^2 - (z-1)^2$
 - (c) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
 - (a) Montrer que si z est racine de P , z^2 l'est aussi, et en déduire que d'autres complexes sont également racine de P
 - (b) Montrer que si z est racine de P , $(z+1)^2$ l'est aussi, et en déduire que d'autres complexes sont également racine de P
 - (c) Démontrer que si z est racine de P , alors $z = j$ ou $z = j^2$.
 - (d) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solution.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 \exp\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

1. Etude de la continuité et de la dérivabilité.

- (a) Préciser l'ensemble I de définition de f . Montrer que f est continue et dérivable sur I .
- (b) Montrer que f se prolonge par continuité à gauche en 1 et -1. On notera toujours f la fonction prolongée.
- (c) Peut-on prolonger f par continuité en 1 et en -1 ?
- (d) Prouver que ce prolongement est dérivable à gauche en 1 et -1 et déterminer $f'_g(1)$ et $f'_g(-1)$.

2. Etude des branches infinies.

- (a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet quatre branches infinies et déterminer leur nature et leur direction asymptotique respective.
- (b) Calculer le développement asymptotique de $x \mapsto \exp\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$ à l'ordre 3 en $+\infty$.
- (c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une courbe asymptote (Γ) en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$ dont on précisera la position par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. Etude des variations.

- (a) Soit $P = 2X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 2$.
En posant $T = X + \frac{1}{X}$, montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[T]$ tel que : $P(X) = X^2 Q(T)$
- (b) En déduire que P admet deux racines réelles α et β ($\alpha < \beta$) que l'on explicitera.
- (c) Exprimer la dérivée de f à l'aide du polynôme P .
- (d) Etablir le tableau de variation de f en vous aidant des questions précédentes.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$. On donne : $\alpha \simeq 0,601, f(\alpha) \simeq 0,141$ et $\beta \simeq 1,665, f(\beta) \simeq 7,093$.**Problème****PREMIERE PARTIE**

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$. On note I l'intervalle $] -\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$.
2. Résoudre (E) sur I .

Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

DEUXIEME PARTIE

4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X . Expliciter cette relation.

5. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3 .

6. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

TROISIEME PARTIE

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés de $a_n = f^{(n)}(0)$.

7. Pour tout entier positif n , exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1} .

8. (a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3 . En déduire a_4 .
 (b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!}$.

On admet que (u_p) converge vers e .

p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

9. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.
 (b) Prouver que les suites $p \mapsto S_p(0)$ et $p \mapsto S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e .

10. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

11. En déduire que pour tout entier naturel n , la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.

12. Prouver que : $a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} n! \sum_{i=0}^p \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}$